INTRODUZIONE ALLA MATEMATICA PER MEZZO DEL CALCOLO...

Giovanni Battista 1695-1765 Caracciolo

INTRODUZIONE ALLA MATEMATICA PER MEZZO DEL CALCOLO UNIVERSALE

In quattro parti divisa.

DEDICATA A S. E. IL SIGNOR

ANGELO GABRIELLI

PRINCIPE DI PROSSEDI &c.

TOMO I., E II.

IN VELLETRI, MDCCLXXI.

NELLA STAMP. DI CESARE SARTORJ

CON LICENZA DE' SUPERIORI.

PREFAZIONE

Quell' operetta, che sotto titolo d' Isagoge in universam mathesim *fu data già alle stampe per un preciso comando di chi sovra di me aveva tutta l' autorità, ora nell' idioma nostro italiano trasportata, e di molte cose accresciuta la presento di nuovo al publico per le incessanti premure di non pochi, che l' hanno voluta. Alla prima mancava la terza, e quarta parte promessa, ma non potuta darsi allora alla luce; e si può dire, che le mancava il meglio, perchè i precetti del calcolo, dati massimamente nelle prime due parti, non venivano a mettersi, dirò così, in pratica nel resto dell' opera. Il titolo, che le si premette, pare a prima vista, che non le convenga attesa l' estenzione del suo significato: mentre se l' Algebra è parte della Matematica, e considera piuttosto la quantità in astratto, e per lo più alla sola quantità, che chiamano discreta, si restringe, come può quest' opera piuttosto algebraica in tutto rigor di verità dirsi introduzione alla Matematica, che ogni sorta di quantità comprende, e assai più in là de' soli nu-*

 meri

meri la sua sfera estende? Così è certamente, se sotto nome d'Algebra quella intendusi, ch'era in uso soltanto presso gli antichi; ma l'Algebra de' moderni si è tanto dopo il Vieta, e'l Cartesio ampliata, che non contenta degli antichi limiti si porta per dovunque la Matematica così pura come mista và spaziando. Qualsivoglia quantità sia discreta, sia continua, o in astratto, o in concreto si è sottoposta al calcolo, e con le leggi del calcolo se ne trovano le relazioni, se n'esaminano gli attributi, se ne inferiscono le verità, parte in Problemi proposte, parte in Teoremi. Ed ecco come sta bene alla presente opera il titolo d'introduzione alla Matematica, perchè da una parte non ha altro scopo, se non che dare i precetti del calcolo, e dall'altra ampliando questi precetti secondo il metodo de' moderni, apre la strada non solo alle verità già trovate sinora da' Matematici, ma all'invenzione di quante altre possono discuoprirsi. Se sia poi veramente qual si spaccia, e se ottenuto abbia l'intento di servir di scorta a chiunque ne' vasti campi della Matematica vuol essere introdotto, non tocca a me l'asserirlo. nè mi dà l'animo d'accertarlo francamente. Prego soltanto il cortese Leggitore a riflettere, che siccome l'Opera Latina fu fatta tumultuariamente, e in mezzo alle molte fatighe, che allora

qua

quasi mi opprimevano, così l' Italiana ha dovuto compilarsi senza l' ajuto, che di pochissimi libri, e con la mente da varj disagi preoccupata, e in nojosi pensieri distratta. Il metodo, che serbo in tutta l' opera, è sempre lo stesso, e per quanto a me ne sembra, con l' aria di novità porta seco anco l' utile, che si ha in accoppiare alle cose volgari le più astruse, e a' numeri, com' anco talvolta alle linee i segni, e le lettere dell' alfabeto. Non è credibile, quanto rincresca a principianti il calcolo Letterale, e dopo la sperienza di più anni ho appreso, che de' moltissimi, i quali al principio cominciano ad applicarvisi, appena pochi prosieguano, e rarissimi la durino, fino ad istruirsene bastantemente; nè rade volte addiviene, che dove ne' trattati Matematici anche i più ameni si vogliono portati innanzi con la scorta dell' Analisi, tuttoche vi si sieno avanzati, si arrestano, e anzicche cimentarsi con que' supposti mostri di segni, e di espressioni analitiche, abbandonano piuttosto l' impresa, contenti al più di certe mal digerite pratiche, di cui confusamente intendono la teoria. Tutto a mio parere proviene, perchè non si vanno appoco appoco avvezzando al calcolo letterale, e a farne uso fin da' primi elementi dell' Aritmetica, e della Geometrìa. Per questo volendo io introdurre alle Matematiche un Candidato,

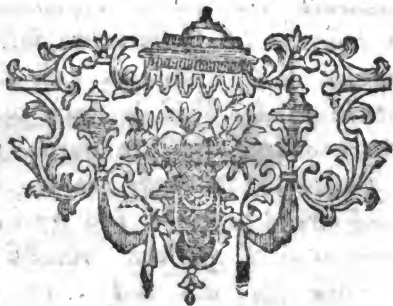
unisco sempre al calcolo numerico il Letterale, adattandolo anche alle linee, secondo che ne verrà l' occasione, e la materia il richiederà. Comincio dall' Algoritmo, che comprende le operazioni aritmetiche così ne' numeri, come nelle lettere; e si tratterà in questa prima parte del calcolo degl'Intieri, de' Rotti, degli Esponenti, e delle quantità radicali Passo poi nella seconda parte alla dottrina delle Proporzioni, e nella prima sezione mi trattengo a spiegare la Ragion d' eguaglianza, o sia l' Equazione in generale; e fermandomi all' Equazioni di primo grado, espongo il modo di formarle, e di risolverle, con darne anche l' uso, che se ne può fare in alcuni teoremi geometrici. Le altre due sezioni conterranno tutta la materia delle proporzioni, Aritmetica, Geometrica, Armonica. Nella terza parte tratterò della risoluzion de' Problemi, e dell'Equazioni di più alto grado. Nella quarta finalmente esporrò l' Aritmetica degl' Infiniti con l' applicazion di essa alla Geometria delle superficie.

Nè mi si dica, essersi la stessa materia, e quasi con l' istesso metodo trattata prima di me da altri valent' Uomini, anche in questi ultimi tempi, i quali par, che l'abbiano posta in un lume, da non potersi desiderar davvantaggio. Lo sò benissimo, e confesso, nulla esservi in quest' Ope-

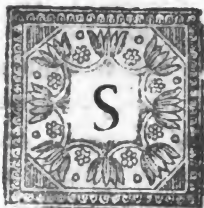
ra,

ra, che or dall' uno, or dall' altro degli Autori, che ho preso per guide, or da tutti essi non sia stato dilucidato. Ho avuto sempre sotto gli occhi, e per le mani l'Aritmetica Universale dell' incomparabile Cav. Nevvton col copioso diligentissimo commentario, e con l' aggiunte fattevi dal P. Antonio Lecchi Gesuita. Ho scorso i tre tomi in quarto dell' Algebra del dottissimo D. Nicolò de Martino. Mi hanno ajutato ancora con le loro Istituzioni il celebre Marchese dell' Ospitale, la famosa Signora d' Agnesi, e per tacere anche altri, che potrei nominare, e che nel corso dell' Opera saranno fedelmente citati, il P Vincenzo Riccati Gesuita, che insieme col P. D. Geronimo Saladino della Congregazion de' Celestini, ha nelle sue Istituzioni Analitiche in due Tomi in foglio compilate, saputo adunare quanto forse in questo genere di cose si è scritto, con molti nuovi Metodi, che immortali renderanno i loro nomi, e viepiù promuoveranno l' uso dell' Analisi. Tutto ciò è vero; ma chi non vede, che sebbene di gran lunga inferiore nel merito, e in ogni altro riguardo è la mia fatica rispetto a quella degli Autori lodati, non è però da stimarsi o nulla, o poco utile, atteso massimamente lo scopo, che si ha prefisso di giovare a principianti, risparmiar loro la spesa de' grossi volumi, e porgergli in bre-

 ve,

ve, e con ordine ciò, che fa per essi, acciò per mezzo di tai principj possano inoltrarsi, e da se poscia bere a' fonti di questa sublime scienza: il che non farebbero forse giammai, se non vi fossero come a mano menati. Oltradichè (siami quì lecito di servirmi del sentimento, e della frase di Marco Tullio lib. 5. Tuscul. disp.) *in tal genere di comporre, non saprei perchè non meglio, che in ogni altro, ciascuno ha il suo fine, ciascuno il suo bello.*

PAR-

PARTE I.

L'ALGORITMO

I. COPO principale della Matematica è il determinare la quantità, cioè tutto ciò che può in qualunque modo crescere, o diminuire; e paragonando l'una quantità coll'altra, in quanto esse sono di misura capaci, sottoporle a calcolo. Siccome però la considerazion della quantità, che forma della Matematica l'universale oggetto, si può in diverse maniere proporre, così a diverse parti della medesima ella s'appartiene.

II. Gli antichi in due modi soltanto segnarono le quantità, cioè o per mezzo di li-

nee, o per numeri. L'uno e l'altro modo ha i suoi vantaggi, e svantaggi. Egli è certamente vantaggioso l'esprimer le quantità per mezzo delle linee; perchè così esprimonsi tanto le note, quanto le incognite, ma il sottoporre a calcolo le linee, non è così facile. Egli è facile all'incontro il calcolare i numeri, ma co' numeri spiegare le quantità incognite, è presso che impossibile. Perciò da' Moderni s'è trovato il terzo modo di segnar le quantità, cioè con le lettere dell'alfabeto, il qual modo i vantaggi degli altri due abbraccia, senza incontrarne gli svantaggi. Questo nuovo metodo di calcolare introdotto dal Vieta, e dal Cartesio, e da tutti li Matematici abbracciato si chiama *Aritmetica Speciosa*, appunto perchè in vece de' numeri, di cui si serve la volgare Aritmetica, adopera le specie, cioè le lettere dell'alfabeto.

III. Tutto ciò, che comprendono le operazioni dell'Aritmetica così volgare, o sia numerica, come speciosa, o sia letterale, dicesi *Algoritmo*, il quale sarà la materia della prima parte di quest'Opra, in guisa che le regole d'ambedue o si facciano comuni, o se tra loro discordano, quelle della numerica servano di luce alle altre della letterale, e con

ciò

ciò l'una e l'altra meglio s'intenda, e d'ambedue la pratica più facilmente si ritenga. Questa prima parte in tre sezioni sarà divisa. La prima tratterà delle quantità intiere, la seconda de' rotti, e la terza spiegherà il calcolo esponenziale, e radicale.

SEZION I.

Calcolo degl' Intieri.

IV. TUtte le quantità, di qualunque specie sieno, possono considerarsi come tante unità, e il loro ammassamento come un numero composto di esse non divise in parti, ma prese come intieri: Ond' è, che la Scienza, che calcola una data specie di quantità considerate come tante unità, si chiama *Calcolo degl' Intieri*, e comprende le comuni operazioni dell' Aritmetica, che sono, il sommare, il sottrarre, il moltiplicare, il dividere. Prima però di venirne alla spiegazione, vopo è, che alcune cose si premettano intorno alla significazione, e all'uso così delle note aritmetiche, come de' segni indicanti le dette operazioni.

PRO-

Circa la ſignificazione, e l'uſo delle Note, e de' Segni.

V. LE note aritmetiche, o numeriche ſono que' diece caratteri venuti a noi dagli Arabi, e ſono 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0; Significano Uno, Due, Tre, Quattro, Cinque, Sei, Sette, Otto, Nove, e in ultimo luogo la cifra, che ſerve ad accreſcere il valor delle note, che la precedono, ſecondo che ſi dirà in appreſſo. La prima nota 1. ſignifica l'unità, cioè una quantità di qualſivoglia ſpecie, potendo dinotare un' Uomo, una pietra, o una qualunque altra coſa conſiderata indiviſa; quindi è, che l' unità non è numero, ma principio d' ogni numero, e il numero è l' ammaſſo di più unità; poichè 1, e 1, fanno 2, 1, 1, e 1, fanno 3, e così in avanti ſino al 9, che vuol dire nove unità. I numeri dal binario ſino al novenario ſono numeri ſemplici; li compoſti poi ſono que', che o hanno anneſſa la cifra, o qualunque altra nota ſuderta, come 10, 11, 24&c. e dall' unione di eſſe ſi forma qualunque numero ſino all' infinito.

VI.

VI. Diverſa è adunque la ſignificazione delle note aritmetiche non ſolo per ſe ſteſſe, cioè per la diverſa forma, che hanno, ma anche per la diverſa ſituazione, che tra loro ſerbano; poichè cominciandoſi a contare ſecondo l' uſo de' caratteri arabici dalla deſtra verſo la ſiniſtra, quella nota, ch' è la prima verſo deſtra, e l' ultima al noſtro modo di leggere, ella ſignifica numero ſemplice, o le unità; quella, che la ſegue immediatamente, ſignifica le decine d' unità, l'altra le centinaja, e poi la quarta le migliaja, la quinta le decine di migliaja, la ſeſta le centinaja di migliaja, la ſettima le decine di centinaja di migliaja, o li milioni, e così in avanti, accreſcendoſi ſempre il valor delle note da un luogo all' altro in proporzion decupla: ſicchè volendoſi eſprimere gli anni dell' Era Criſtiana, che ſono 1769. il nove poſto in ultimo luogo ſignifica nove anni, il ſei decine ſei, o ſeſſanta anni, il ſette centinaja ſette, o ſettecento, l' uno ſignifica mille, e haſſi a leggere così, mille ſettecento ſeſſanta nove.

VII. E queſto propriamente è l' uſo della Cifra, detta Zero, che da per ſe nulla ſignifica, ma ſerve ſoltanto ad aumentare il valore della nota precedente diece volte dippiù; ſic-

ſicchè la nota per eſ. 1, che eſſendo ſola, ſignifica una unità, col beneficio di uno o più zeri, cui ſi premetta, paſſando al ſecondo, al terzo, o a qualunque altro luogo, ſignifichi una decina, un centinajo, o qualunque altro ſuperior numero; coſicchè 10 val diece, 100 val cento, 1000 mille, 1000000 vale un milione. Quindi ſe s' offeriſca una lunga ſerie di note, per eſprimerla a dovere, dividaſi in periodi di tre in tre, cominciando da deſtra, frapoſto dopo ogni ternario di note un punto, o una lineetta, e così il primo ternario indica le centinaja, il ſecondo le centinaja di migliaja, il terzo le centinaja di milioni, il quarto le centinaja di migliaja di milioni, e poi ſeguono li bilioni con l'iſteſſa legge. Sia dato a cagion d' eſempio queſta ſerie di note, o queſto numero 78 | 322 | 457 | 694 | 000 diviſo in periodi per mezzo di linee (l' iſteſſo ſarebbe, ſe in vece di linee ſi poneſſero punti, o accenti) ſi vede, che ha cinque periodi, l' ultimo de quali quì ha due ſole note, e potrebbe averne anche una ſola: onde appartiene a' bilioni, e in conſequenza vale ſettantotto bilioni, trecento ventidue mila milioni, quattrocento cinquantaſette milioni, ſeicento novantaquattro mila.

VIII.

VIII. In vece de' numeri gli Algebristi servonsi delle lettere dell'alfabeto, adoprando le prime a, b, c, d, &c. ad esprimer le cognite, o le date quantità, e le ultime v, x, y, z, ad esprimer le incognite, o le cercate. Sogliono anco per comodo del calcolo, e non senza gran risparmio di parole usare certi segni. Il segno + significa *più*, come $a + b$ significa *a più b*, cioè *a* aggiunto a *b*, o *b* aggiunto all' *a*; ond'è segno di Somma, sicche se *a* val 4, *b* 5, $a + b$ vaglia 9. Il segno — significa *meno*, così $b - a$ significa *b meno a*; ond' è segno di Sottrazione, se *b* vale 8, *a* val 6, $b - a$ significa otto meno sei, cioè due. Il segno $\pm$, a cui si contrappone l'altro $\mp$ è segno ambiguo, di modo che $\pm a$, o $\mp a$ vuol dire, che la quantità *a* si può assumere nell' uno e nell'altro senso, col più, o col meno, cioè positiva o negativa, come si dirà appresso. Segno d'egualianza è $=$; segno di maggiorità è $>$, di minorità è $<$; sicchè $a = b + c$ vuol dire, che la quantità *a* è uguale alle quantità *b*, *c* insieme unite, $a > b$, che *a* è maggiore di *b*, $b < c$, che *b* è minore di *c*. Il segno ∞ significa l'infinito, e però $a = \infty$ significa, che *a* è eguale all' infinito, cioè è quantità infinita. Vi sono altri segni, de' quali

li al proprio lor luogo si parlerà specialmente del segno di moltiplicazione, ch' è ×, di Divisione, ch' è ÷, e dell' eguaglianza delle ragioni, ch' è ::, overo ∴, secondo che l' eguaglianza è o di ragioni geometriche, o di aritmetiche.

IX. Le quantità altre si dicono *semplici*, e con greco vocabolo *monomie*, altre *composte*, e *polinomie*. Le semplici sono quelle, che una o più lettere in un sol termine contengono, cioè tra loro non distinte da segno alcuno, come a, ab, aab; le composte, che più termini, e se questi son due, si diranno binomie, come $a + b$, $c - df$, se sono tre, trinomie, come $a\ b - c + d$, e così quadrinomie, se li termini son quattro &c.

X. Li numeri antiposti alle lettere si chiamano *Coefficienti*, come $2a$, $3b$, e indicano, quante volte si pone l'istessa quantità, sicchè $2a$ vale $a + a$, $3b$ vale $b + b + b$; e quando non vi è numero prefisso alla lettera, vi s'intende 1; onde a è l'istesso che $1a$. Le quantità, che hanno prefisso il segno +, si dicono *positive*, e tali anche sono, quando poste al principio non hanno alcun segno; quelle, che portano dinanzi il segno −, si dicono *negative*.

XI. Affinchè però di queste quantità negati-

gative si formi da principianti la giusta idea, si deve diligentemente avvertire, che sebbene la serie delle quantità negative comincia dal Zero, e in consequenza esse son minori del Zero, o sia del niente, non pertanto debbono aversi come assurde, e impossibili, essendo piuttosto vere e reali, non meno che le positive. Imperocchè siccome è proprio delle quantità positive l'indicare le vere e reali eccedenze sopra il zero, così delle negative è l'assegnare le vere e reali deficienze dal zero. Laonde o si dica $o+b$, overo $o-b$, nell'uno e nell'altro caso la b è quantità reale; e tutto il divario consiste, che la b negativa deve intendersi andare in parti totalmente opposte a quelle, per dove và la b positiva, cominciando di là, ove la stessa è eguale a zero; Così se $o+b$ significa un monte di una qualunque altezza sù l'orizonte, $o-b$ indicherà una valle altrettanto all'ingiù dell'orizonte; e se nel primo caso b significa un dato camino da Terracina verso Roma, nel secondo caso indica un simile camino da Terracina verso Napoli. Quindi il ch. Wolfio paragona le quantità negative a' debiti. Fingete, dic' egli, di non aver niente di denaro, se poi acquistate 10. scudi, gia avete più del niente; ma se

non

non avendo niente, dovete 10. scudi già avete men del niente, perchè avreste da dar 10, e poi avreste nulla.

CAPO I.

Del Sommare.

XII. Il Sommare è una Operazione Aritmetica, per cui date due o più quantità semplici, o composte, si trova un'altra, che sia a tutte le date uguale. I dati diconsi *Sommandi*, quello che si trova, si dice *Somma*, la quale per essere come un tutto rispetto a' Sommandi, dev' essere ad essi insieme presi eguale. Ciò s'intenda tanto delle quantità numeriche, quanto delle letterali; poichè però la pratica del Sommare non è in tutto per ambedue la stessa, perciò si darà in due distinti problemi, e l'istesso si farà nelle susseguenti operazioni.

PROBLEMA I.

Sommare le quantità numeriche.

XIII. Si scrivano i numeri dati come in tante serie, ma in guisa, che que', che sono dell'istessa specie si corrispondano a colonna,

cioè

cioè che le unità della seconda serie (così delle altre) si mettano sotto le unità della prima, e formino la colonna delle unità, o de' numeri semplici, le decine delle serie susseguenti sotto le decine della prima formando la colonna delle decine; e l'istesso si faccia delle centinaja, delle migliaja &c. Si tiri una linea orizontale, perchè i Sommandi non si confondano con la somma. Indi partitamente si aggiungano insieme i numeri della prima colonna, e poi della seconda, della terza &c. scrivendone le somme parziali, ciascheduna sotto la propria colonna, avvertendo però, che se la somma di qualunque colonna avanza il 9, allora la decina come unità si riserva alla somma della colonna successiva, e 'l zero, o altro che sia numero semplice si scrive in quella colonna: il medesimo s'intenda, se nella somma parziale vi sieno più decine: Se in tutta una colonna non vi sieno che zeri, si mette sotto un solo zero, perchè il niente quantosivoglia replicato non è che un niente. I due esempj, che qui soggiungo, metteranno in chiaro quanto si è detto.

Esempio I.	Esempio II.
3578	2900
10496	1210
742	370
184	90
———	———
15000	4570

Li numeri dati del primo Es. si dispongono in quattro serie, distinguendosi in colonne li numeri dell'istessa specie, sicchè formino cinque colonne. Quindi cominciando dalla colonna delle unità, dico; 8 e 6 fanno 14, e 2, 16., e 4. fanno 20, soscrivo o, e porto 2. per la colonna seguente, ch'è delle decine; e dico 2, e 7 son 9, e 9 son 18, e 4, 22, e 8 son 30; metto sotto la colonna delle decine o, e porto 3, che aggiunto al 5 da 8, e 4, più 7, più 1 fanno insieme 20, scrivo anche o, e porto 2, che insieme col 3 fa 5 da scriversi sotto la quarta colonna, e finalmente 1 sotto la quinta, sicchè la somma totale fa 15000. Così sommando i numeri del secondo es., non trovo nella colonna delle unità, che quattro zeri, onde metto o, nella seconda trovo 17, metto 7; e portando 1 trovo, che insieme co' numeri della terza co-

lonna

lonna ho 15; metto 5, e 1 insieme col 3 della quarta colonna delle migliaja mi da 4: onde la Somma è 4570.

XIV. E in vero se le Somme parziali si dispongano in tante serie, e poi si sommino insieme, ne verrà la stessa somma totale, che si è trovata sommando le colonne; il che può servire di pruova, per vedere se la prima operazione è andata bene. In fatti disposte, come qui sotto si vede, le somme parziali del primo Es., e sommate insieme danno la stessa somma totale 15000.

Serie di unità	20
Di decine	280
Di centinaja	1700
Di migliaja	3000
Di dec. di migl.	10000
Somma totale	15000

XV. La ragion dell' operato dipende da quell'assioma che un tutto dev' essere eguale a tutte le sue parti insieme. Or essendo la Somma il tutto, i sommandi le parti, quella deve trovarsi a questi insieme presi eguale.

PROBLEMA II.

Sommare le quantità letterali.

XVI. TRE casi si possono considerare, cioè 1. quando le quantità hanno le stesse lettere, e gli stessi segni: 2. quando le lettere son le stesse, ma non i segni: 3. quando le lettere son diverse, comunque sieno li segni. Nel primo caso si aggiungano li coefficienti, o numeri prefissi, come si è detto nel probl. 1., e succeda alla somma la lettera comune, come a, e $2a$ fanno $3a$, b e $5b$ fanno $6b$, $5ab$, e $3ab$ fanno $8ab$. Nel secondo caso il minor coefficiente sottraggasi dal maggiore (come si dirà nel seguente capo) e al residuo colla lettera comune si preponga il segno del maggior coefficiente, come $5a$, e $-3a$ fa $2a$; $-5ab$ e $+3ab$ fa $-2ab$; $8ab$ e $-8ab$ fa zero. Nel terzo caso le quantità date si mettano l' una dopo l' altra, ritenendo gli stessi segni, che prima avevano, come ne' due susseguenti esempj, che tutti tre li casi comprendono.

	Esempio I.	Esempio II.
Sommandi	$2a + 2ab + d$	$8ab + bc - 37$
	$a - 4ab$	$-7ab - bc + 42$
Somma	$3a - 2ab + d$	$ab \quad 0 + 5$

XVII.

XVII. La ragion dell'operato è l'istessa, che si è detta di sopra (n. 15.). Il perchè però nel secondo caso la somma si cambia in sottrazione, ciò proviene per la condizione delle quantità negative, le quali per le cose dette (n. 11.) sono direttamente opposte alle positive, onde scambievolmente distruggonsi. Ciò si rende chiaro ne' numeri, i quali siccome dal zero avanzandosi formano una serie di numeri positivi, così dal zero ritrocedendo formano una serie di numeri negativi 0, 1, 2, 3, 4, 5 &c. 0 — 5, — 4, — 3, — 2, — 1. Perlochè opponendosi al progresso de numeri un simile regresso, vopo è, che i numeri negativi giunti a' positivi, il valor di questi diminuiscano, e quindi che i positivi per la giunta de' negativi a se eguali, diventino zero; anzi passino in negativi, se li negativi loro aggiunti sieno maggiori. Or l'istesso si dica delle quantità letterali: Di fatto fingete, che avendo cinque scudi, ne dobbiate tre, già avrete 5 — 3, cioè 2; per sommare dunque $5a$, e $-3a$, dovete sottrarre dal 5 il 3, e vi restano $2a$. Se poi dovendo cinque ne avete tre, dovete sottrarre da — 5 il 3, e resta — 2, cioè sarete ancor debitore di sc. 2. Questa operazione si dice ridurre le quantità a *più semplice espressione*, qua-

B 3 le

le non hà luogo, ſe non nelle quantità ſimili, cioè eſpreſſe con le lettere iſteſſe.

CAPO II.

Del Sottrarre.

XVIII. IL Sottrarre ſi oppone al Sommare, eſſendo un'operazione, per cui date due quantità ineguali ſi cerca di quanto una quantità avanza l'altra, o, ch'è lo ſteſſo, di quanto una dall'altra differiſce, e queſto chiamaſi *Avanzo*, *Reſto*, *Differenza*.

PROBLEMA III.

Sottrarre le quantità numeriche.

XIX. SE i numeri dati ſono ſemplici, ſubito ſi vedrà l'avanzo del maggiore, da queſto togliendoſi il minor numero. Così togliendo dal 7. il 3, l'avanzo ſarà il 4; ſe i dati ſoro compoſti ſi diſpongano in due ſerie, la ſuperiore contenga il numero maggiore, l'inferiore il numero minore, e in guiſa che ſi corriſpondano a colonna que' dell' iſteſſa ſpecie, come ſi è detto averſi a fare nel Sommare: Quin-

Quindi sottraendo prima le unità del minor numero dalle unità del maggiore, le decine dalle decine, e così in avanti, si soscrive sempre il resto sotto la linea orizontale nella colonna, in cui si è fatta la sottrazione. Quando non vi ha resto, si metta zero. Quando dal numero di sopra non si può togliere quello di sotto maggiore, allora si aggiunga al numero di sopra una unità pigliata, come in prestito, dalla nota precedente, la quale perciò rimane diminuita d'una unità, che rispetto alla seguente, cui si è aggiunta, val dieci. L'istesso si fa, quando nel numero di sopra s'incontri un zero, perchè aggiuntovi 1. preso dalla precedente, diventa 10, e se s' incontrino più zeri, giunta al primo zero l' unità tolta da quella nota, che immediatamente precede gli altri zeri, questi hanno ad aversi in conto di nove, com' è da vedersi in questi esempj.

Esempio I.		Esempio II.	
	3805		9000
	1945		3460
Resto	1860	Resto	5540

Nel primo Esempio dal numero 3805 devesi

fottrarre il numero 1945 questo soscrivo a quello, e tirata la linea orizontale dico: Da 5 tolto 5 resta zero, pongo 0 nella colonna delle unità; dal seguente zero non si può togliere il 4; onde pigliando 1 dal susseguente 8, e giuntovi il zero, dico: da 10 tolto 4 resta 6, da scriversi nella colonna delle decine; e poiche la nota 8 meno 1 è 7, e dal 7 non si può togliere il 9, dico: da 17 (presa l'unità del vicino 3) tolto il 9, resta 8, e dal 2 tolto 1, resta 1. Sicchè tutto il resto è 1860. Così nel secondo esempio sottraendo da 9000 il numero 3460, dico da zero tolto zero resta 0, 6 da 0 non si può, da 10 resta 4, 4 da 9 (essendosi il zero superiore cambiato in 9 per l'unità presa dalla prima nota) resta 5, e 3 da 8, resta 5; cioè in tutto 5540.

XX. La ragione si ha dallo stesso assioma, Il tutto è uguale a tutte le sue parti insieme. Imperochè il numero dato maggiore è come il tutto, e parte di questo è il numero dato minore: onde se il minore dal maggiore tragasi, necessariamente il resto è l'altra parte, la quale se si aggiunga al minore dà di nuovo il maggiore. E questa è la pruova della sottrazione; cioè se giungendo il resto al minore, la somma sia eguale al maggior numero.

mero. Che poi non potendosi sottrarre la nota inferiore dalla superiore omogenea, questa venga ad aumentarsi di dieci unità, mentre una sola le si aggiunge dalla vicina, ciò è perche l'unità della vicina precedente val diece di quelle, di cui ella costa, come si è detto (n. 6.); quindi è, che sebbene la nota 8. del primo es. perda una unità, che qui vale un centinajo, la nota seguente, cui si è aggiunta, viene ad essere dieci decine; ond'è che da queste tolte 4 decine, il resto è 6 decine: l'istesso s'intende ne' simili casi.

PROBLEMA IV.

Sottrarre le quantità letterali.

XXI. LA regola generale per tutte le quantità, o sieno simili, o dissimili, cioe o abbiano le stesse, o diverse lettere, consiste nella sola mutazione de' segni in quella, che devesi dall'altra sottrarre; e val quanto dire, che il + si cangi in —, e il — in +, soggiungendo al segno cangiato la quantità, che si vuole sottrarre, col ridurre, quando occorra, il residuo a più semplice espressione (n. 17) Così sottraesi $2a$ da $5a$, scrivendo

do $5a - 2a$, cioè $3a$, e da $2b$ il b scrivendo $2b - b = b$, e d da d scrivendo o. Così anche da $a + b$ si sottrae $c + d$, scrivendo $a + b - c - d$, e da $a + b$ il $c - d$, scrivendo $a + b - c + d$. Similmente il resto di $- 3a$ sottratto da $+ 3a$ è $8a$, e al contrario il resto di $+ 3a$ sottratto da $- 5a$ è $- 8a$. Dove avvertasi, che a sottrarre b da a, dovendosi scrivere $a - b$, se a è quantità maggiore di b, il resto della sottrazione, cioè la differenza sarà positiva, ma se a è minore di b, la differenza sarà negativa.

XXII. Or perchè s'intenda la ragione di quanto si è detto, basta riflettere alla natura della sottrazione, ch' è direttamente contraria alla Somma. Quindi è, che si devono cangiare i segni nella quantità, che hassi a sottrarre, altrimenti sarebbe non sottrazione, ma somma. Di fatto se la somma di a, e b è $a + b$, la sottrazione di a da b è $b - a$, e vuol dire, che a sottrarre una quantità positiva da un' altra positiva, vopo è giungere a questa positiva quella negativa; e se la somma della positiva a, e della negativa b è $a - b$, la sottrazione della positiva dalla negativa, come di a da $- b$ è $- b - a$, e della negativa dalla positiva, come di $- a$ da b è $b + a$, cioè con toglie-

togliere il negativo ſupplirvi il poſitivo. E queſto è il perchè ſottraendo da $a+b$ la quantità $c-d$; il reſto è $a+b-c+d$; perochè non haſſi a ſottrarre l'intera quantità c; ma c meno d; eſſendoſi dunque per la $-c$ tolta l'intera, deve ſoſtituirſi la d, perchè non ſi tolga più del dovere. Queſt'iſteſſo ſi rende più chiaro per le coſe dette al n. 17., donde diſcende, chè volendoſi ſottrarre da $5a - 3a$, il reſto è $+8a$. Fingete, che $5a$ ſia il cammino di 5 miglia da Terracina verſo Roma, ſarà il $-3a$ il cammino di 3. miglia da Terracina verſo Napoli: Onde ſe io domandaſſi, quanto Tizio nel primo cammino è diſtante da Sempronio nel ſecondo cammino, mi ſi riſponderebbe, eſſer diſtante $5a+3a$, dovendo eſſer la diſtanza eguale alla differenza di $5a-3a$; la quale perciò, che ſi è detto, è $5a+3a = 8a$.

XXIII. Quindi è da oſſervarſi, che ſebbene nella ſottrazion numerica la quantità, che ſi ſottrae, non può eſſer maggiore di quella, onde deve ſottrarſi; preſſo gli Algebriſti però, che mettono a calcolo le quantità negative, ſi fa talvolta la ſottrazione della quantità maggiore dalla minore. Se a cagion d'eſempio ſi aveſſe a ſottrarre $a=16$ da $b=12$, il reſto

è una

è una quantità negativa, cioè $12 - 16 = -4$. Negli Esempj, che soggiungo, si trova la differenza, intendendosi cambiati secondo la regola i segni nella quantità posta al di sotto.

Es. I.	Es. II.	Es. III.
$2a + b$	$-2a + 8b$	$9ab + 4c + 36$
$a - b$	$-a + 5b$	$3ab - 8c + 24$
$a + 2b$	$-a + 3b$	$6ab + 12c + 12$

CAPO III.

Del Moltiplicare.

XXIV. Il Moltiplicare altro non è, se non ritrovare una terza quantità, date che sieno due altre, la quale tante volte contenga una delle date, quante volte l'altra contiene l'unità. Ma più generalmente significa il trovare una terza quantità, la quale sia ad una delle date, come l'altra è all'unità. Le date quantità si dicono *Fattori*, e la minore, suol'essere la moltiplicante: la terza, cioè la trovata dicesi il *Fatto*, o *Prodotto*.

PRO-

PROBLEMA V.

Moltiplicar le quantità numeriche.

XXV. SI ſcrivano le date quantità, l'una maggiore di ſopra, l'altra minore di ſotto, e tirata la linea orizontale ſi moltiplicano ad una ad una, cominciando dall'ultima, le note tutte del numero ſuperiore per ciaſcheduna nota del numero inferiore, o ſia del moltiplicatore; i prodotti ſi pongano ſotto la linea, e formino altrettante ſerie, quante ſono le note del moltiplicatore, in modo però, che il lor principio a deſtra corriſponda in colonna a quella nota, per cui ſi è moltiplicato. Le decine, che nel moltiplicare ſi raccolgono, devono giungerſi al prodotto dell'isteſſa nota moltiplicante nella ſuſſeguente del numero da moltiplicarſi. Quindi è, che la moltiplicazione è come una ſomma in compendio, cioè un'iterata poſizione d'una delle date quantità, e tante volte, quante ſono le unità nell'altra; perochè moltiplicare 4 per 3, o 3 per 4 (ch'è lo ſteſſo) non altro ſignifica, che porre il 4 tre volte, o il 3 quattro volte: Onde 4×3 (n. 8.) $= 4 + 4 + 4$.

XXVI. Soggiungo quì la tavola detta Pitago-

tagorica ad uſo della moltiplicazione de' numeri ſemplici tra loro, come di 4 e di 7 Si prenda il 4 di fronte, e il 7 di lato, o ch'è lo ſteſſo, ſi trovi il 4 nella prima ſerie, e il 7 nella prima colonna, o al contrario il 7 nella ſerie, e il 4 nella colonna. Si cali giù dal 4 preſo di fronte ſino ad incontrar la ſerie del 7 preſo di lato, e nel concorſo ſi troverà il numero 28, ch'è il prodotto de' dati numeri.

TAVOLA PITAGORICA.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

XXVII.

XXVII. Benchè non avrà bisogno della predetta tavola anche un principiante, se voglia far uso delle proprie dita per mezzo della seguente pratica. Essendo i numeri semplici, che si hanno a moltiplicare, più di 5, si alzino nell' una e nell' altra mano tante dita, quante sono nell'uno, e nell'altro numero dato le unità sopra li 5. Le dita alzate portano altrettante decine; cui si unisce il prodotto delle dita, che restano chiuse, per aversi il prodotto totale. Ciò si farà chiaro cogli esempj. Mi si domanda il prodotto di 7 in 9; alzo in una mano due dita, perchè nel 7 due son le unità sopra li cinque, e 4 ne alzo nell' altra mano, perchè tante sono le unità sopra li cinque nel 9: le sei dita alzate portano sei decine, o 60, cui aggiunto il prodotto di 3 in 1, che sono le dite chiuse in ambedue le mani, avrò 63 prodotto totale de' dati numeri. Così volendo moltiplicare insieme 8, e 6, alzo in una mano tre dita, nell'altra un solo, e alle 4 decine aggiungo il prodotto di 2 in 4, cioè delle dita chiuse, ed avrò 48. Dissi, *essendo i numeri semplici più di 5*; perchè se son meno di 5, già si conosce subito il lor prodotto: se poi l'un de due sia = 5, tante saranno le decine nel prodotto,

quan-

quante sono nella metà dell' altro numero le unità ; siccome se l'un de' due sia = 10 , il prodotto avrà tante decine , quante son le unità nell' altro ; com' è da per se chiaro:

XXVIII. La moltiplicazione de' numeri semplici dà quella de' composti secondo la regola data al n. 25. ; li varj casi, che abbraccia la regola , sono esposti ne' seguenti esempj . Si abbia a moltiplicare 723 per 8: Pongo 8, ch'e il moltiplicatore sotto il 723 , quindi dico 3 in 8 da' 24 pongo 4 sotto la linea a destra , e riservo le due decine , da giungersi al prodotto susseguente , ch'è del 2 in 8 = 16 + 2 = 18; pongo 8 a lato del 4 verso la sinistra , e riservo 1 ; finalmente dico 7 in 8 dà 56 + 1 = 57. Dunque l' intero prodotto è 5784. Che se il moltiplicatore fosse anch'egli numero composto , come nell' Es. I. , dopo d' aver trovato il prodotto partiale del 723 per 8 , cioè 5784, scrivo sotto di esso l' altro prodotto dello stesso 723 per 4 , ch' è l' altra nota del moltiplicatore , avvertendo , che siccome la prima nota del primo prodotto corrisponde alla prima nota moltiplicante , così la prima nota del secondo , che qui è 2 , corrisponda alla seconda nota moltiplicante , cioè al 4. Indi sommando i due prodotti , nella lor somma avrò

il

prodotto totale cioè 34704. Che se trà le note del moltiplicante s' incontri qualche zero, la moltiplicazione per esso, essendo sempre eguale a zero (perchè siccome $o \times o = o$, così qualunque numero $x \times o = o$) si può ommettere, purchè il prodotto susseguente cominci a scriversi sotto la nota moltiplicante, come nell' Es. II. Similmente ove accada, che l' un de due, o ambidue i fattori finiscano in zero, o anche in più zeri, senza perder tempo in essi, si moltiplichino i numeri, e al prodotto totale si aggiungano a destra tanti zeri, quanti sono que', in che finiscono i fattori, com' è da vedersi fatto negli Es. II. III. IV.

Es. I.	Es. II.	Es. III.	Es. IV.
723	5470	9538	8760
48	308	460	790
5784	43760	57228	7884
2892	16410	38152	6132
34704	1684760	4387480	6920400

PROBLEMA VI.

Moltiplicar le quantità letterali.

XXIX. SE le quantità da moltiplicarsi sono semplici, si metrano l'una do-

po l'altra senza frapporvi segno alcuno. Così $a \times b$, cioè volendosi a moltiplicato per b, si scriva ab, overo ba, non variandosi mai per la variazion de' luoghi il valor delle lettere, come certamente si varia il valor de' numeri. L'istesso s'intenda, se sieno più di due le quantità semplici, che si vogliono insieme moltiplicate, imperochè il prodotto delle prime due si moltiplica per la terza, e così in avanti Per es. sieno da moltiplicarsi tra loro a, b, c, d; $a \times b = ab$, $ab \times c = abc$, $abc \times d = abcd$. Se sono composte, si faccia non altrimente, che nella moltiplicazion numerica, cioè si dispongano, come in due serie, quella, che deve moltiplicarsi, sopra, e l'altra sotto: indi si formino tanti prodotti partiali, quante sono le quantità semplici moltiplicanti, cominciando piuttosto dalla prima, o sia a sinistra, e nella somma di tutti li partiali si avrà il totale. Quando vi sono coefficienti, questi si moltiplichino insieme, e al prodotto di essi succeda il prodotto delle lettere; come $3a \times 4b = 12ab$, $2cd \times 3a = 6acd$. Non volendosi talvolta effettuare, ma soltanto indicare la moltiplicazione, allora sopra ciascheduno fattore si pone una linea orizontale, e tra l' uno e l' altro fattore un

pun-

punto, o il ſegno ×. Così $\overline{a+b}.\overline{c-d}$, overo $\overline{a+b}\times\overline{c-d}$, ſignifica il binomio $a+b$ moltiplicato per il binomio $c-d$.

XXX. E poichè le quantità, che ſi hanno a moltiplicare inſieme, o ſono ambedue poſitive, o ambedue negative, o l'una poſitiva e l'altra negativa, perciò per i ſegni da premetterſi a' prodotti, queſta è la regola generale: Se le quantità hanno l'iſteſſo ſegno, al prodotto ſi appone il ſegno + ; ſe hanno diverſo ſegno, al prodotto ſi dà il ſegno −; Laonde + in +, overo − in − *fa* +, + in −, o − in + *fa* −, ſicche $a\times b$, $-a\times -b$ fa $+ab$, $-a\times +b$, $+a\times -b$ fa $-ab$. Li ſeguenti eſempj abbracciano i caſi ſudetti.

Eſ. I.	Eſ. II.	Eſ. III.
$a+b$	$-4a+7b$	$a+b-d$
$c-d$	$3d$	$a-b$
$ac+bc-ad-bd$	$-12ad+21bd$	$aa+ab-ad$
		$-ab-bb+bd$
		$aa\quad 0-ad-bb+bd$

XXXI. Reſta a dimoſtrarſi la regola de' ſegni. La moltiplicazione, come ſi è detto al n. 24.

n. 24, fa, che il prodotto tante volte contenga l'una delle date quantità, quante volte l'altra contiene l'unità: Onde, come al fine del n. 25. si è dedotto, ella è come un'iterata posizione della quantità da moltiplicarsi, che tante volte si pone, quante ne indica la moltiplicante. Dunque il moltiplicare una quantità qualunque, sia positiva, sia negativa per + 3, altro non è, che metterla tre volte nello stato suo, cioè non cambiato il proprio segno; e moltiplicarla per 2, è metterla due volte, moltiplicarla per 1, è metterla una volta, per 0, è neppure una volta, cioè non metterla affatto, perchè qualunque quantità moltiplicata per zero, svanisce, e diventa nulla: Se poi si moltiplichi per — 1, — 2, — 3 &c. tante volte, dice qui il VVallis, più poco del nulla, si pone, perchè — 1, — 2, — 3, &c. sono men che nulla cioè tante volte realmente si toglie (n. 11, 17, e 22). E' chiaro adunque, che $a \times 2 = 2a$, $-a \times 2 = -2a$, $a \times -2 = -2a$; ma non meno chiaro sarà, che $-a \times -2 = 2a$; imperochè se la quantità negativa moltiplicata per la positiva ($-a$ per 2) dà il prodotto negativo, cioè $-2a$, e questo tanto minore in tal'ordine, e val quanto dire, tanto minore del zero, quanto è maggio-

giore la moltiplicante; ne viene in conſequenza, che la moltiplicante diminuendoſi, il prodotto diventa minore nell' ordine de' negativi, cioè altrettanto ſi avvicina di nuovo al zero; sicchè diventi zero, ſe la moltiplicante è zero, maggior del zero, e conſeguentemente positivo, ſe la moltiplicante è minor del zero, cioè negativa; é allora è, che $-a \times -2$ vuol dire, che $-a$ due volte si toglie, cioe cambiato ſegno, realmente due volte si pone. Queſt' iſteſſa regola si dichiara meglio per mezzo de' numeri. Si voglia moltiplicare $8-3$ per 5, certamente 8 in 5 dà 40, prodotto invero maggior del dovere, perchè devesi moltiplicare per 5 non già l'intero 8, ma $8-3$; dunque al prodotto di $5-3$ deve apporsi il ſegno $-$ ſecondo la regola già dimoſtrata, perchè si abbia $40-15=25$, qual'è il prodotto di $8-5$ $(=5)$ moltiplicato per 5. Similmente volendosi moltiplicare $8-2$ per $8-2$, ſarebbe l' iſteſſo, che ſottratto 2 da 8, moltiplicare 6 per 6; ma ſe ſenza ſottrarre si moltiplichi 8 per 8, già si vede, che il prodotto 64 è più del giuſto; moltiplicandosi poi 8 per -2, e -2 per 8, si avranno i prodotti -16, e $-16=-32$. Or $64-32$, fa 32, cioè meno di quello, che dev' eſſere. Dunque vopo è che si aggiunga il pro-

dotto di $-2\times-2=4$, e s'avrà $64-32+4=36$, ch'è il prodotto di 6×6.

CAPO IV.

Del Dividere.

XXXII. PER mezzo della Divisione si cerca una terza quantità, date che sieno due altre, la quale tante volte contenga l'unità, quante la maggior delle date contiene l'altra. Ciò s'intenda specialmente de' numeri intieri, ne' quali il più grande si chiama il *Dividendo*, il minore il *Divisore*; siccome quello che si cerca, e trovasi per la divisione si chiama il *Quoto*, o *Quotiente*; Questo però nella Divisione presa in più ampio senso è quello, che dice la stessa ragione all' unità, che il Dividendo dice al Divisore; sicchè se a debba dividersi per b, si verifichi, che a sia al b, come x, o $\frac{a}{b}$ ad 1.

PROBLEMA VII.

Dividere le quantità numeriche.

XXXIII. SE i numeri dati sono corti, o se, essendo il Divisore un numero semplice, il Dividendo sia minore del decuplo del Divi-

visore ; si trova subito il quotiente , cioe il numero , che indica quante volte il Dividendo contiene il Divisore ; Così 8 diviso per 2 dà 4. A questo fine può servire anche la tavola Pitagorica posta sopra. Perochè preso il Divisore di fronte , e nell'istessa colonna trovato il Dividendo , o il numero prossimamente minore di esso , si avrà nel lato dell' istessa serie il quotiente. Per es. si voglia dividere 48 per 6. Si prenda il 6 di fronte , o nella prima serie , e calando giù nella stessa colonna si trovi il 48 , cui in quella serie corrisponde a lato il numero 8 , ch'è il quoziente di 48 diviso per 6. Ma quando i numeri , o ambedue , o l'un de' due , sieno composti e lunghi , non sittosto apparirà , quante volte il Dividendo contiene il Divisore , e fa duopo perciò d' una operazione composta. Si premetta il Divisore al Dividendo frappostavi una linea , o lunetta , e mettendo un'altra lunetta appresso il dividendo , dietro la quale ha da venire il quotiente , si cerchi , quante volte il divisore 7 (come nell' Es. I.) si contiene esattamente nella prima , o nelle due prime note del dividendo 371 , cioè nel 37 ? (poiche nella prima nota 3 non cape) trovato contenersi esattamente cinque volte , si scriva 5

dietro la lunetta ; indi moltiplicando il quotiente 5 per il divisore 7 , e 'l prodotto 35 sottraendo dalla prima parte del dividendo , cioè da 37 , al resto 2 appongasi l'altra nota del dividendo ch' è 1 ; e in questa seconda parte del dividendo 21 si faccia la stessa operazione di prima , cioè si cerchi quante volte il 7 si contiene nel 21 , e trovato che tre volte , si scriva 3 dopo il 5 nel quotiente ; e poichè il prodotto di 3 in 7 , ch' è 21 tolto da 21 seconda parte del dividendo , non dà se non zero , nè vi sono altre note del dividendo, si conchiude , che il quoziente totale di 371 diviso per 7 , è 53.

XXXIV. Sicchè tutto il difficile della Divisione ne' numeri alti è il trovare quante volte il minore cape nel maggiore ; il che non potendosi agevolmente a una sola occhiata , vopo è trovarlo partitamente , distribuendo la divisione come in tante parti , la prima delle quali o sia eguale a tutto il divisore , o prossimamente maggiore di esso ; le altre parti poi della divisione si vanno successivamente formando dal residuo della sottrazione del prodotto del quotiente ultimamente trovato nel divisore , con aggiungere a detto residuo una o due ulteriori note del dividendo , che facciano un numero prossimamente maggiore del divi-

divisore. Che se aggiunta al residuo, come conviene, una o due ulteriori note del dividendo, pure questa parte da dividersi rimanesse minore del Divisore, allora posto un zero nel quotiente uniscasi alla detta parte anche un'altra susseguente nota, se vi è, del Dividendo, com'è da vedersi nell' Es. III., in cui perchè sottratto 1641 (prodotto del quotiente 3 nel divisore 547) dalla prima parte della divisione, cioè da 1684, il resto 43 accresciuto della ulteriore nota 7 del dividendo, ancor rimane minore del divisore, perciò si pone o nel quotiente dopo il 3, e si aggiunge al num. 437 l'ultima nota 6 del dividendo, sicchè 4376 formi la terza parte della divisione da ultimarsi.

XXXV. Si deve anche riflettere alle cose seguenti: 1. Nessun quotiente partiale può essere mai maggiore di 9: Onde se talvolta il Divisore si contenesse più di nove volte nella corrispondente parte della Divisione, si metta nel quotiente il 9, o anche un numero minore; il simile si operi ogni qualvolta il quotiente trovato, moltiplicato per il divisore dà un prodotto maggiore della parte del dividendo, da cui dovrebbe sottrarsi; in tal caso il detto quotiente si scemi d'una unità, come si vede fatto nell' Es. II., in cui il divisore è 12,

il dividendo 9984. Or se, siccome 1 prima nota del Divisore entra nove volte nella prima nota del dividendo, così mettessi nel quotiente il 9, ne verrebbe, che moltiplicando 12 per 9, il prodotto 108 sarebbe maggiore del 99 prima parte della divisione, da cui quello non si potrebbe togliere; e perciò il quotiente non è 9, ma 8; e la ragione di ciò è, che sebbene 1 prima nota del Divisore cape nove volte nel 9 prima nota del dividendo, il 2 però altra nota del Divisore non cape nove volte nel 9 seconda nota del dividendo. 2. Si rifletta, che se il Divisore non entri esattamente nel Dividendo, sicchè finita la Divisione ci rimane un qualche residuo minore, come dev' essere, del divisore, allora si aggiunga al quotiente una frazione, il di cui numeratore sia il residuo medesimo, e 'l denominatore il divisore, come nell' Es. IV; ove si divide il 379 per 5, e si trova il quotiente $75\frac{4}{5}$ il quale indica, che il 5 non esattamente contiensi nel 379, ma oltre le 75 volte, che vi entra esattamente, vi resta il 4. In 3. luogo si osservi, che qualora il Divisore finisce in uno, o più zeri, di questi può non aversi conto nella divisione, come se non

vi fossero, purchè di altrettante note nel dividendo, quanti sono li zeri nel divisore, non si abbia similmente conto, da restituirsi però nel residuo ultimo finita la divisione, come si vede fatto nell' Es. V.

Esempio I.

Divis. Dividendo Quoziento

```
7)  371  (53
    35
    ---
    021
     21
    ---
     00
```

Esempio II.

```
12) 9984 (832
    96
    --
    038
     36
     --
     024
      24
      --
      00
```

Esempio III.

```
547) 168476 (308
     1641
     -----
     004376
       4376
       ----
       0000
```

Esempio IV.

```
5) 379 (75 4/5
   35
   --
   029
    25
    --
    04
```

Esem-

Esempio V.

$$4'00)\ 244'60\ (61\ \frac{60}{400}$$

$$\begin{array}{r} 24 \\ \hline 004 \\ 4 \\ \hline 0 \end{array}$$

XXXVI. Questa operazion del dividere, o già fatta, o da farsi, suole talvolta esprimersi a modo di frazione, il di cui numeratore sia il dividendo, il denominatore sia il Divisore. Così $\frac{12}{3}$ dinota il numero 12 diviso, o da dividersi per 3, come diremo nella sezion seguente trattando de' Rotti, e come si è accennato di sopra al n: 32; d'onde si ricava, che sebbene nella divisione de' numeri intieri, di cui quì si parla, quanto il dividendo è maggior del divisore, tanto ancora il quotiente è maggiore dell' unità, nella divisione però in più ampio senso presa basta, che si verifichi la proporzione, che il quotiente sia all' unità, come il dividendo al divisore; onde in questa non sempre si scema la quantità divisa, ma può rimaner la stessa, ed anche divenir

venir maggiore; cioè quante volte il divisore è maggior dell' unità, anche il dividendo è del quotiente maggiore; ma essendo il divisore minore dell' unità, o ad essa eguale, anche il dividendo è minore del quotiente, o eguale al medesimo. Non altrimenti, ma in senso opposto, è della Moltiplicazione, la quale ne' numeri intieri porta, che il prodotto tante volte contenga l' un de' dati, quante l'altro intiero contiene l'unità; Presa però più generalmente (n. 24.) indica la proporzione tra il prodotto e l'una delle date quantità, tra l'altra delle date e l' unità; onde non sempre per la moltiplicazione, in questo ampio senso presa, si aumenta la quantità moltiplicata, ma talvolta o rimane la stessa, o anche si fa minore, com'è chiaro a chi lo considera.

XXXVII. Quindi scorgesi, esser la Divisione, e la moltiplicazione operazioni tra loro del tutto opposte, siccome abbiam detto esserlo tra loro il sommare, e'l sottrarre; perciò come la moltiplicazione è un'iterata posizione della stessa quantità(n.25.) così la divisione è un iterata sottrazione,o questa in compendio,almeno ne'numeri intieri,poichè il cercare,quante volte 12 contiene 3, è l' istesso che cercare, quante volte dal 12 si può sottrarre il 3. E siccome

me il Sommare, e 'l Sottrarre perchè sono trà loro opposte operazioni, l'una può servir di pruova all'altra; così opponendosi anche trà loro il moltiplicare, e 'l dividere, l'uno è pruova dell'altro. Laonde affine di veder, se si è proceduto bene nel moltiplicare, si divida il prodotto per un de' fattori, e 'l quotiente dev' essere l'altro fattore; e affin di vedere, se la divisione è ben fatta, si moltiplichi il quotiente per il Divisore, e 'l prodotto sarà la quantità divisa.

PROBLEMA VIII.

Dividere le quantità letterali.

XXXVIII. Molti casi si possono distinguere. In 1. luogo se sieno quantità semplici, ed abbiano lettere comuni, queste si tolgano via, o, ch'è lo stesso, si tolga il divisore dal dividendo; ciò, che rimane, è il quotiente. Imperochè essendo la Divisione direttamente opposta alla moltiplicazione, ne viene, che il quotiente dev'esser quello, che moltiplicato per il divisore restituisce il dividendo. Onde se ab è il prodotto di a in b, chiara cosa è, che dividendosi per a, il quotiente dev'esser b perchè $b \times a$, dà di nuo-

nuovo ab. Similmente la quantità abc divisa per ab dà il quotiente c, e divisa per c dà il quotiente ab; E perchè tutte le quantità si possono intendere moltiplicate per l'unità quindi è, che se qualche quantità debbasi dividere per se medesima, come a per a, il quotiente è 1. Quando in esse v'ha coefficienti, il coefficiente del Dividendo dividesi per quello del Divisore, come nell'aritmetica comune, così $6a$ diviso per $2a$ dà $3a$.

XXXIX. In 2. luogo se le quantità sono tali, che il divisore non si contenga esattamente nel dividendo, com'è, quando o niuna lettera è comune, o almeno non tutte le lettere del divisore si trovano nel dividendo, allora il quotiente è una frazione, che ha per numeratore il dividendo, e per denominatore il divisore; così $\frac{a}{b}$ è il quoziente di a diviso per b. Così $3ab$ diviso per $-c$ dà il quoziente $\frac{3ab}{-c}$, overo $\frac{-3ab}{c}$; poichè il valor della frazione, o sia il quotiente nell'uno e nell'altro caso è negativo; e se dividesi $-5ab$ per $-3d$, il quoziente è $\frac{-5ab}{-3d}$, overo $\frac{5ab}{3d}$, nell'uno e altro caso positivo per la regola de' segni da spiegarsi al n. seguente. Sogliono alcuni indicar la divisione di queste quan-

quantità, interponendo o due punti, o questo segno $\div$ tra il dividendo, e il divisore, come $a:b$, overo $a \div b$ significa, che a è diviso per b. Noi però ci serviremo quasi sempre delle frazioni. Se poi qualche lettera del Divisore si contiene nel dividendo, le lettere comuni si tolgano, e 'l resto come sopra. Così diviso ab per xb, il quoziente è $\frac{a}{x}$. La ragione di ciò è, perchè, come diremo trattando delle frazioni, il valor di queste non si varia, quando così il numeratore, come il denominatore dividonsi per l'istessa quantità. Quest' istesso si deduce dalle leggi delle proporzioni; imperocchè per il n. 32. come il dividendo al divisore, così il quotiente è all' unità, cioè nel caso addotto come ab è a xb, così $\frac{ab}{xb}$ ad 1. Ma la ragione di ab a xb è la stessa che di a alla x. Dunque l'istessa ragione all' unità dice tanto $\frac{ab}{xb}$, quanto $\frac{a}{x}$; Dunque queste due frazioni sono tra loro eguali.

XL. Rispetto a' segni da premettersi al quotiente vale la stessa regola della moltiplicazione, cioè quando il Dividendo, e 'l Divisore hanno l'istesso segno o del più, o del meno, sempre il quotiente ha il segno $+$, cioè

è posi-

è positivo ; quando quelli han diverso segno questo ha il segno — cioè è negativo. La ragione è l' istessa dell' assegnata nel n. 31, ma applicata in senso contrario, perchè alla moltiplicazione, ch' è un' iterata posizione dell' istessa quantità, si oppone diametralmente la Divisione, ch' è un' iterata sottrazione, e compendiosa della quantità stessa; nè altrimente si verificherebbe la proporzione tra il dividendo, e 'l divisore, e tra il quotiente, e l'unità, se non si osservasse la data regola de' segni, com' è chiaro a chi considera gli esempj di sopra addotti.

XLI. In 3. luogo nella divisione delle quantità composte tre casi possono considerarsi: il primo è, quando il solo dividendo e' composto, e allora per il divisore semplice si dividano tutt' i termini successivamente del dividendo, osservate le cose dette ne' num. precedenti: onde se $ab + cb - db$ si debba dividere per b, sarà il quotiente $a + c - d$; e se la stessa quantità $ab + cb - cd$ si divida per x dà il quotionte $\frac{ab + cb - db}{x}$; la quantità poi $ab + bc - cd$ divisa per b dà $a + c - \frac{cd}{b}$ quotiente parte intiero, e parte rotto. Il secondo caso è, quando il solo divisore è

D com-

composto, e allora questo si scriva sotto al dividendo all' uso delle frazioni, e se ne' termini del numeratore, e del denominatore vi sarà qualche comune quantità, questa si cancelli: come dividendo $3a^3b$ per $aa - ax + ab$, sarà il quotiente $\frac{3a^2b}{a - x + b}$. Il terzo caso è, quando l' uno, e l'altro è composto, e allora si procede quasi nella stessa forma, in cui nel probl: precedente abbiam detto doversi dividere i numeri assai composti, come si vede fatto nell' Es. sequente.

Div:^{re} $7b + 5d$) Div:^{do} $21ba + 15da - 35bf - 25df$
Quo. ($3a - 5f$ $\quad -21ba - 15da$

$$\overline{\quad 0 \qquad 0 \quad}$$

$$+35bf + 25df$$

$$\overline{\quad 0 \qquad 0 \quad}$$

XLII. Ov' è da notarsi, che poco importa, se la divisione cominci dalla destra, o dalla sinistra; anzi se da una lettera piuttosto che da un'altra, in qualunque luogo si trovi, perchè nelle lettere non si cambia, come ne' numeri, il valore per la variazione, e per il cangiamento di luogo. Aggiunge il Nevvton, che nelle quantità composte, in cui vi sono lettere

tere di varie dimensioni, si ha da ordinare la divisione da farsi secondo qualunque lettera, che si stimerà più spediente, e questa ritenersi in tutta l'operazione, di modo che il primo termine sia la potestà massima di quella lettera assunta, il secondo sia la potestà prossimamente minore, e così di mano in mano (Che cosa sieno le potestà, si spiegherà nel calcolo degli Esponenti) Per es. la quantità $y^3 + xy^2 + x^2y + x^3$ si dice ordinata secondo la lettera y; se poi si volesse ordinata secondo x, si scriverà $x^3 + x^2y + xy^2 + y^3$. Soggiungo per chiarezza maggiore, e per esercizio de' principianti due esempj di questa divisione. Si voglia divisa la quantità $ba - db - da + a^2$ per $b + a$. Ordino l'una e l'altra per a, e così ordinate scrivo la dividenda in A, la dividente in B. Divido il primo termine della quantità in A, cioè a^2 per il primo termine della quantità in B, cioè per a, e 'l quotiente a scrivo in D; per questo moltiplico il divisore in B, e 'l prodotto $a^2 + ba$ sottraggo dal Dividendo in A, e poichè per la regola della sottrazione si distruggono scambievolmente i termini $a^2 + ba$, $-a^2 - ba$, il residuo, che scrivo in E, sarà $-da - ba$ ordinato già secondo la stessa lettera a, e divido il primo

 ter-

termine di esso, cioè $-da$ per a, il quotiente sarà $-d$, che pongo in D dopo il primo quotiente; e poichè moltiplicato per $-d$ il divisore $a+b$, e sottratto il prodotto dalla quantità in E, niente vi resta, conchiudo, che la quantità in D è il quoziente totale.

$$\begin{array}{l} A.\; a^2 + ba - da - db.\; B.\; a+b \\ -a^2 - ba \qquad\qquad\qquad (D.\; a-d \\ \hline \;\;0 \qquad 0 \\ \qquad\qquad E.\; -da - db \\ \qquad\qquad\quad\; +da + db \\ \hline \qquad\qquad\quad\;\; 0 \qquad 0 \end{array}$$

Sia per 2. Es. la quantità $9x^2 - y^2 + ab$, posta in A, da dividersi per $3x-y$, che pongo in B. Diviso il primo termine $9x^2$ per $3x$, ho il quotiente $3x$ messo in D, e per esso moltiplicato il divisore, e sottratto il prodotto, ho il primo residuo in E, cioè $3xy - y^2 + ab$, diviso quindi $3xy$ per $3x$, e per il quotiente y moltiplicato il divisore, e fatta la dovuta sottrazione ho l'altro residuo ab. Ma perchè questo residuo non può dividersi per $3x-y$, conchiudo, non potersi avere l'esatta divisione, e però sarà il quotiente parte intiero $3x+y$,

parte

parte rotto $\frac{ab}{3x-y}$; il quale si può anche scrivere a modo d'una sola frazione $\frac{9x^2-y^2+ab}{3x-y}$

overo così $\overline{9x^2-y^2+ab} \div \overline{3x-y}$.

$$
\begin{array}{ll}
A.\ 9x^2-y^2+ab\ . & B.\ 3x-y \\
-9x^2+3xy & (D.\ 3x+y\ \frac{ab}{3x-y} \\
\quad 0 & \\
\quad E.\ 3xy-y^2+ab & \\
\quad -3xy+y^2 & \\
\quad \overline{\quad 0 \quad 0 \quad ab} &
\end{array}
$$

CAPO V.

Delle quantità dinominate.

XLIII. Quantità dinominate si dicono quelle, che essendo dell'istessa specie, hanno diversa dinominazione, come sogliono essere le Misure, le Monete, i Pesi, e cose simili. Queste sorti di quantità sono tali, che crescendo, o mancando nella loro specie, non serbano la stessa proporzione di accrescimento, o decrescimento. Così nelle misure 12 Oncie fanno un palmo Napoletano, 3 palmi un braccio, 8 palmi una canna. Il piede reale di Pa-

 rigi

rigi costa di pollici 12, ogni pollice di linee 12, ed ogni linea di 10 particelle. Nella moneta napoletana corre in oro la doppia di sei, e di quattro ducati, la mezza doppia di due, l'oncia siciliana di tre ducati; in argento vi è la moneta di 12 carlini, quella di 10, o di un ducato, di sei, di cinque, di quattro, di tre, e di due carlini, o d'un tarì, oltre altre. In rame il grano, ch' è la decima parte del carlino, la publica, ch' è un grano, e mezzo, il tornese ch' è mezzo grano, e 'l tre cavalli, ch' è la quarta parte del grano. La moneta Romana in oro ha il Zecchino, che vale paoli venti e mezzo, il mezzo zecchino, e 'l quartino; in argento ha lo scudo, che val dieci paoli, il mezzo scudo, il teftone, che vale tre paoli, il paolo, che val dieci bajocchi, il mezzo paolo, detto il grosso, il mezzo grosso; in rame il bajocco, il mezzo bajocco, e 'l quattrino, ch' è la quinta parte del bajocco, oltre altre monete parte di rame e parte di argento. Riguardo a' pesi il rotolo in Napoli è di 33. oncie, la libra di 16. oncie; è anche in uso la libra di 12 oncie; l'oncia si divide in 12. grani. Riguardo al tempo l'anno civile, o sia il giuliano è di 365 giorni, e 6 ore; il giorno contiene 24 ore, l'ora 60 minuti pri-

mi

mi, ogni minuto primo 60 ſecondi, e così in avanti. Ne' computi aſtronomici il Zodiaco divideſi in 12 coſtellazioni; che chiamanſi ſegni, il ſegno in 30 gradi, il grado in 60 minuti primi, ognun di queſti in 60 ſecondi &c.

XLIV. Le miſure adunque, i peſi, le monete, e coſe ſimili, che nella loro ſpecie hanno diverſa denominazione, e ſono varie ſecondo la varietà de' paeſi, o degli uſi, che ammettono, ſi devono calcolare come quantità intiere ſecondo le regole date ne' capi precedenti. Si ha però da ſapere il valore di qualunque inferiore riſpetto alla ſuperiore o moneta, o miſura, o altra quantità dinominata: con oſſervare quante unità della inferiore adeguino la ſuperiore: Quindi

XLV. I. Per la ſomma ſi diſpongano i termini in modo, che gli Omogenei ſi corriſpondano a colonna, e cominciando dall'ultima colonna, cioè dagl'infimi, ſi vegga, ſe la ſomma di queſti adegua o nò l'unità, o più unità del termine precedente; ſe l'adegua, ſi mette zero in quella colonna, e ſi porta l'unità da aggiungerſi alla colonna ſeguente; e ſe è maggiore, l'eceſſo ſi ſcriva in quella colonna, e l'una, o più unità ſi aggiungano alla ſeguente. E così nelle altre colonne, come negli Eſempj ſeguenti.

Esempio I. nelle Misure.

Canne 6	Palmi 7	Oncie 8
10	4	6
9	3	7
26	7	9

Esempio II. nelle Monete.

Doc. 7	Tarì 4	Grana 7
16	3	4
9	2	6
33	4	17

Esempio III. nel calcolo Astronomico.

Segni 1,	Gradi 3,	Min: 16,	Sec: 30
0,	12,	23,	15
2,	5,	47,	45
4,	23,	18,	10
8,	14,	45,	40

XLVI. II. A trovar la differenza delle quantità dinominate, si proceda, come si è detto nel Plobl: III. riflettendo solamente, che quante volte si dà alla quantità d'inferior valore una unità della precedente, questa vale tante unità nella inferiore, quante egualmente ne porta. Così nella moneta Napoletana

letana un Ducato equivale a 5 tari, un tarì a 20 Grana. Nelle misure una tesa equivale a 6 piedi, un piede a 12 pollici, un pollice a 12 linee, come negli Esempj seguenti.

	Doc:,	Tarì,	Grana,	Tese,	Piedi,	Pollici,	Linee
	4,	3,	7	470,	2,	9,	8
	2,	4,	9	137,	4,	10,	11
Res.	1	3	18	332,	3,	10,	9

XLVII. III. La moltiplicazione, e divisione delle quantità di diversa dinominazione non si può avere, se prima non siano ridotte a una stessa dinominazione, e ridotte che sieno, si moltiplicano, e si dividono secondo le regole date ne' Plobl: V., e VII. Questa riduzione si ha o per mezzo della moltiplicazione, volendosi le quantità di denominazione superiore ridotte a quelle d'inferiore, o per la divisione, se al contrario quelle di denominazione inferiore si vogliano ridurre ad una superiore: Per esempio si abbiano a ridurre scudi 15. (moneta Romana) in quattrini. Si riducano prima gli scudi a paoli, moltiplicandoli per 10, saranno 150 paoli, questi si riducano a bajocchi, moltiplicando 150 per

per 10, il prodotto 1500 bajocchi si moltiplichi per 5, perchè il bajocchio val 5 quattrini, e 'l prodotto 7500 è il numero de' quattrini, che equivale a 1500 bajocchi, a 150 paoli, e a 15 scudi. Si abbiano in secondo luogo a ridurre le quantità di denominazione inferiore ad una di superiore, come i pollici a piedi, i piedi à tese. Si divida il numero de' dati della denominazione inferiore per il numero delle unità della specie inferiore eguali all' unità della specie superiore, come il numero de' dati pollici per 12, mentre 12 pollici fanno un piede; il quotiente darà il numero de' piedi eguale al dato numero de' pollici; così il numero trovato de' piedi si divida per 6, quanti bisognano per fare una tesa, e 'l nuovo quotiente darà il numero delle tese. Sieno per es. 216. pollici da ridursi prima a piedi, poi a tese: $\frac{216}{12} = 18$, e $\frac{18}{6} = 3$. Dunque 216 pollici ridotti a piedi fanno 18, e 18 piedi fanno 3 tese.

Coll' istesso metodo le monete, i pesi, le misure, e cose simili, che sogliono esser diverse secondo la diversità de' paesi, si riducono in modo, che quelle d' un paese equivalgano alle simili di ogni altro paese.

SE-

SEZIONE II.

Calcolo de' Rotti.

XLVIII. NOI non conosciamo, nè determinar possiamo le quantità, come sono in se stesse, e assolutamente, ma soltanto rispettivamente alle altre dell' istessa specie. Quindi l' intiero, e il rotto non differiscono, se non in quanto il rotto significa, ed esprime una cosa come parte d' un' altra dall' intiero indicata; e l' intiero significa una cosa, che rispetto ad uno, o a più suoi rotti è, come un tutto rispetto ad una, o a più delle sue parti. Ma ciò non vieta, che quello, ch' e' intiero rispetto a quella quantità omogenea considerata come sua parte, non possa essere un rotto rispetto a un' altra anche omogenea considerata come suo tutto: il somigliante si applichi al rotto. Così la quantità palmare si può pigliare come un' intiero, e come un tutto relativamente alle oncie, di cui costa, e si può pigliare come un rotto relativamente alla Canna, di cui è parte. Or avendo nella prima sezione trattato del calcolo degl' Intieri, cioè delle quantità considerate come intieri, ragion vuole, che or trattiamo de' Rotti,

ti,

ti, cioè delle quantità, che ad altre si riferiscono come parti al suo tutto. E prima premettiamo i Prolegomeni, che sono per la maggior parte come Assiomi, che spiegano la natura, e le proprietà de' Rotti.

PROLEGOMENI

Circa la natura, e le proprietà de' Rotti.

XLIX. Frazione io dico una qualunque parte, o più parti di quelle, in cui s' intende divisa una data quantità o numerica, o letterale; e si esprime con due o numeri, o lettere l' una sopra dell' altra, interpostavi una lineetta orizontale, in questo modo $\frac{2}{3}$, $\frac{a}{b}$ &c. La nota o numerica, o letterale, ch' è sopra la linea, si chiama *il Numeratore*, quella, ch' è sotto, il *Denominatore*. Questo denomina le parti del tutto, cioè indica in quante parti eguali si suppone diviso l'intiero: quello numera le dette parti cioè dimostra, quante di quelle parti eguali si prendono. Quindi s' intende il perchè ogni quotiente, come si è detto trattandosi della Divisione, và ottimamente espresso a modo di frazione: perochè le frazioni $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{3}$, $\frac{4}{3}$ altro realmente non sono, se non li quotienti de' numeri 2,

3, 4,

3, 4, per l'istesso numero 3 divisi, e la frazione $\frac{ab}{c}$ è il quotiente della quantita ab divisa per la quantità c; e poichè ogni quantità si può intender divisa per se stessa, perciò ogni quantità intiera diviene una frazione, qualora ad essa si soscriva l'unità, come $\frac{4}{1} = 4$, $\frac{ab}{1} = ab$.

L. Non v' ha dubio adunque, quella ragione avere sempre la Frazione al suo intiero, che ha il numeratore al denominatore, cioè il numero delle parti prese al numero delle parti, in cui è diviso l'intiero; E questo è il senso universalissimo, in cui si prende presso gli Algebristi ogni qualunque frazione, cioè che essa abbia all' intiero, overo all' unità la stessa ragione, che corre trà il numeratore, e il denominatore della medesima: Quindi quando il numeratore è minore del denominatore, la frazione è minore dell' intiero; quando il primo è eguale al secondo, anche la frazione equivale all' intiero; quando quello è maggiore di questo, anche la frazione è maggiore dell' intiero. Vero è però, che solamente nel primo caso la frazione è propriamente tale, per essere allora parte del suo tutto: negli altri due casi si dice frazione spuria, cioè

cioè impropriamente tale, perchè $\frac{2}{2}$, $\frac{3}{3}$, $\frac{4}{4}$ &c. non sono in realtà, che 1; e $\frac{4}{2}$ è maggiore di 1, eguale a 2.

LI. Le Frazioni finora spiegate sono semplici. Vi ha ancora le composte, che sono parti di parti, e costano di più frazioni unite col segnacaso *di*; Così $\frac{1}{3}$ di $\frac{3}{4}$ si legge una terza di tre quarte, e significa, che d' un' intiero già diviso in 4 parti prese tre, di queste si prenda la terza parte: onde $\frac{1}{3}$ di $\frac{3}{4}$ del tarì fa grana 5, perchè $\frac{3}{4}$ del tarì sono 15 grana, e la terza parte di queste vale grana 5.

LII. Esprimendosi per quello, che si è detto, il valor della frazione per mezzo della ragione, che ha il numeratore al denominatore, ne segue, che le frazioni, nelle quali la ragione de' numeratori a' suoi denominatori è la stessa, sono eguali; laonde sono sempre dell' istesso valore queste frazioni $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{4}{8}$ e simili, perchè in esse la ragion del numeratore al denominatore è in tutte la stessa, cioè di 1 a 2. Siccome se a è a b, come c a d, $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$. Il valore adunque delle frazioni

non

non dalla grandezza de' termini, con cui si esprimono, ma dalla proporzione di essi termini dipende, sicchè paragonata l'una con l'altra, quella si dirà maggiore, il di cui numeratore avrà maggior ragione al suo denominatore. Così $\frac{3}{8} > \frac{2}{6}$ e $\frac{2}{4} < \frac{3}{4}$.

LIII. Quindi ancora ne segue, che quante volte i termini dell'istessa frazione si moltiplicano, o dividono per la stessa quantità, non si cambia mai il valor di essa, perchè rimane sempre la stessa ragione del numeratore al denominatore. Così $\frac{4}{8} = \frac{12}{24}$, perchè il 4 e l'8 termini della frazioni sono moltiplicati per 3; così $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$. Similmente se $\frac{4}{8}$ si divida per 2, e $\frac{ac}{bc}$ si divida per c sarà $\frac{4}{8} = \frac{2}{4}$, e $\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}$.

CAPO I.

Della riduzione de' Rotti.

LIV. Il calcolo de' rotti or per necessità, or per comodo maggiore esige, che le Frazioni, senza cambiare il valore, d'una in altra forma si cangino. A quest' uso serve la riduzione, la quale abbraccia molti casi, ammettendo

tendo le stesse regole per le frazioni così numeriche, come letterali.

PROBLEMA I.

Ridurre le frazioni di diversa dinominazione all' istessa, senza variarne il valore.

LV. SOno di diversa dinominazione le Frazioni, che diverso hanno il denominatore. Or a fare, che abbiano l' istesso denominatore due frazioni, che l' hanno diverso, senza che cangino il valore, si moltiplichino i termini della prima frazione per il denominatore della seconda, e i termini di questa per il denominator della prima. Così si otterrà, che le date frazioni non cangino di valore, perchè i loro termini si moltiplicano per l' istesso denominatore, ed abbiano comune il denominatore, ch' è il prodotto di quelli, che prima avevano. Come $\frac{2}{3}$, e $\frac{4}{5}$ diventano dell' istessa denominazione, e coll' istesso valore, se 2, e 3 si moltiplicano per 5, e se 4, e 5 si moltiplicano per 3; i prodotti daranno $\frac{10}{15}$, $\frac{12}{15}$ in cui è l' istesso denominatore, e a questo i nuovi numeratori 10, e 12 hanno

l' istes-

l'istessa ragione, che li primi 2, e 4 avevano a suoi denominatori 3, e 5. Coll'istesso metodo riduconsi all'istessa denominazione le frazioni letterali $\frac{a}{b}$, $\frac{d}{c}$, cioè $\frac{ac}{bc}$, $\frac{bd}{bc}$.

LVI. All'istesso modo, se sieno più di due le frazioni da ridursi, si avrà il denominator comune nel prodotto di tutt'i dati denominatori, e i nuovi numeratori si avranno, se ciascheduno de' dati numeratori si moltiplichi per il prodotto de' denominatori, eccetto il proprio. Sien da ridursi all'istessa dinominazione le tre frazioni $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{4}$; moltiplicati insieme li denominatori 3, 5, 4, s'avrà il denominator comune 60; indi moltiplicato 1 per 5×4, s'avrà 20, moltiplicato 2 per 3×4, s'avrà 24, e moltiplicato 3 per 3×5, s'avrà 45, e in conseguenza saranno le frazioni ridotte, eguali alle date, $\frac{20}{60}$, $\frac{24}{60}$, $\frac{45}{60}$. Similmente le frazioni $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{e}{f}$ ridotte, sono eguali a queste $\frac{adf}{bdf}$, $\frac{cbf}{bdf}$, $\frac{ebd}{bdf}$. Così anche $\frac{b+c}{a+b}$, $\frac{d-c}{b-d}$ ridotte all'istesso nome saranno

$$\frac{bb+bc-bd-dc}{ab+bb-ad-bd}, \quad \frac{ad-ac+bd-bc}{ab+bb-ad-bd}$$

 LVII.

LVII. Più ſpedita addiviene la riduzione, quando il denominatore di una frazione è moltiplice del denominator dell'altra; allora diviſo il moltiplice per l'altro; ſi moltiplichino per il quotiente i termini della frazione, in cui non è il moltiplice. Così $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{6}$ ridotte ſono $\frac{4}{6}$, $\frac{5}{6}$, perchè diviſo 6 per 3, ſi moltiplica per il quotiente 2 la frazione $\frac{2}{3}$; così anche $\frac{a}{b}$, $\frac{cx}{bb}$ $=\frac{ab}{bb}$, $\frac{cx}{bb}$. L'iſteſſo ſi pratichi, quando il denominatore d'una frazione è fattore del denominator dell'altra, come in queſte due $\frac{a}{b}$, $\frac{cx}{yb}$, in cui b è fattore del denominator yb, in queſto caſo per l'altro fattore y moltiplicata la frazione $\frac{a}{b}$, avremo $\frac{ay}{yb}$, $\frac{cx}{yb}$.

LVIII. Quando però v'ha frazioni compoſte, queſte ſi riducono ad una ſemplice, moltiplicati che ſieno inſieme i numeratori, e i denominatori; perochè i loro prodotti danno i termini della frazion ſemplice equivalente alle compoſte. Così $\frac{3}{4}$ di $\frac{2}{5}=\frac{6}{20}$, Sicchè $\frac{3}{4}$ di $\frac{2}{5}$ del tarì ſono grana 6.

PRO-

PROBLEMA II.

Ridurre le Frazioni spurie, o impropriamente così dette.

LIX. QUante volte il numeratore o è eguale al denominatore, o è maggiore di esso, allora la frazione o è eguale all' intiero, cioè all' unita, o è maggiore di essa (n. 50.) e in conseguenza benche abbia la forma di frazione, veramente non è tale, e si può ridurre o all'intiero, o ad un composto d'intiero, e di rotto. Ciò si ottiene dividendo il numeratore per il denominatore. Così $\frac{4}{4} = 1$, e $\frac{12}{4} = 3$, e $\frac{15}{4} = 3 + \frac{3}{4}$. Similmente $\frac{a}{a} = 1$, $\frac{abc}{c} = ab$, e $\frac{3a+b}{a} = 3 + \frac{b}{a}$. La ragion dell' operato è perchè, come sopra al n. 49. si è detto, ogni frazione è un quotiente del numeratore diviso per il denominatore: ond' è il segno della divisione, che attualmente fatta non altro fà, se non quello, che indicava la frazione. Ma questa, essendo spuria, indica o l'intiero, o più che l'intiero; dunque diviso il numeratore per il denominatore, il quotiente o è l'intiero, o più che l'intiero.

LX. Con questo metodo si possono ridurre le quantità di denominazione inferiore ad altre di superiore, di cui abbiam parlato al capo V. della sez. preced. Imperochè le quantità di denominazione inferiore rispetto all'altre dell'istessa specie, ma di denominazione superiore, essendo realmente parti di queste, si possono esprimere a foggia di frazioni, per es. nelle misure il palmo è parte della canna, che porta 8. palmi; onde il palmo è $\frac{1}{8}$ della canna; se dunque nel computo de' palmi trovo la frazione $\frac{18}{8}$, riduco questa a canne 2, e $\frac{2}{8}$.

PROBLEMA III.

Ridurre un' intiero, o l' intiero col rotto a un rotto di dato denominatore.

LIX. PER comodo del calcolo alle volte giova moltissimo questo Problema. La risoluzione consiste in moltiplicare l' intiero per il dato denominatore, soscrivendo al prodotto l' istesso denominatore. Per ridurre a cagion d' esempio il numero 4 alla frazione, che abbia il denominatore 3, si moltipli-

tipli-

tiplichi 4 per 3, e al prodotto 12 soscrivasi il 3, perchè $\frac{12}{3} = 4$ e nell' istessa maniera l'intiera quantità $a = \frac{ab}{b}$. Non altrimente a ridurre l' intiero e 'l rotto alla denominazione medesima del rotto si moltiplichi l' intiero per il denominatore del rotto, che gli và unito, al prodotto si aggiunga il numeratore, e alla somma si soscriva lo stesso denominatore. Così $5\frac{2}{3} = \frac{17}{3}$, perchè $5 \times 3 = 15$, e $\frac{15+2}{3} = \frac{17}{3}$ e $2a + \frac{b}{c} = \frac{2ac+b}{c}$

Nell' istessa maniera si avrà la riduzione delle quantità di denominazione superiore alle omogenee inferiori, come delle libre in oncie, de' piedi in pollici, delle tese in piedi &c. com' è chiaro anche per le cose dette nel capo V. della I. sezione.

PROBLEMA IV.

Ridurre le Frazioni a più semplice espressione.

LXII. NON è di piccol rilievo la soluzion di questo problema. Dipende da ciò, che abbiam detto nel n. 53, cioè non cangiarsi il valor della frazione, quando i termi-

ni di essa per l'istessa quantità si dividono : Laonde se i termini della frazione abbiano comune il divisore, fatta la divisione, la frazione rimane dell'istesso valore; benchè non dell'istessa forma, ma con termini più semplici. Per es. se i termini della frazione $\frac{ab}{cb}$ si dividano per la comune quantità b, la frazione $\frac{a}{c}$ diverrà più semplice, e dell'istesso valore di prima. Così $\frac{36}{108}$ dividendosi per 36 comune divisore del numeratore e del denominatore, si farà $\frac{1}{3}$. Perchè però non un solo, ma molti possono essere i divisori; quanto sarà maggiore quello, che si sceglie per divisore attuale, tanto più semplice addiviene la frazione. Così della frazione $\frac{abn+cbn}{xbn}$ l'uno e l'altro termine si può dividere per n, e ne verrebbe la frazione $\frac{ab+cb}{xb}$; ma i termini di questa ulteriormente si possono dividere per b, onde anche più semplice diverrebbe, fatta tal divisione, cioè $\frac{a+c}{x}$. Ciò però si sarebe ottenuto in una volta, se dal principio la divisione si fosse fatta per il massimo comune divisore bn. Nell'istessa maniera se tanto il numeratore, quanto il denomi-

natore del rotto $\frac{36}{108}$ si dividono per 4, o per 6 comuni divisori, ma non massimi, il rotto $\frac{36}{108}$ si cambierà o nel $\frac{9}{27}$, o nel $\frac{6}{18}$, se poi la divisione si faccia per 36, ch' è il massimo, allora il rotto sarà nella forma sua più semplice, e ne' minimi termini ridotto $\frac{1}{3}$.

LXIII. Quando i termini sono assai composti, non è si facile il discernere a prima occhiata, se i dati termini abbiano il massimo comune divisore, e quale sia. Per intelligenza di che si deve osservare, che ne' numeri alcuni si dicono *Primi*, e son quelli, che non hanno altra parte aliquota, se non l'unità, cioè non sono da altro numero, fuorchè da 1 esattamente misurati, come sono 3, 5, 7, 11, 13, 17 &c., e questi trà se paragonati non hanno comune divisore, per essere *Primi*; altri si dicono *Composti*, e son quelli, che da altri numeri esattamente si misurano, come il 15, che si dice composto di 5, e di 3, perchè $5 \times 3 = 15$, e tanto l'uno, quanto l'altro esattamente lo misura: Quindi *tra se Composti* si dicono quelli, che hanno una comune misura, cioè un divisor comune, come 14 e 21 esattamente misurati dal 7.

LXIV. Or a trovare il massimo comune divisore di due numeri: si sottragga quante volte si può il numero minore dal maggiore, o, ch'è lo stesso, si divida il maggiore per il minore, e non avendo conto del quotiente, per il residuo si divida il primo divisore, (e se questo fosse anche minor del residuo, dovrebbe per l'istesso primo divisore dividersi il residuo) e così si proceda, insinattantoche il residuo diventi zero. Quel divisore, per cui si fa la divisione, prima d'ogni altro, senza residuo, è il massimo comune divisore. Per es. sieno i num. 180, e 72, de' quali si cerchi il massimo comune divisore. Sottraggasi il 72 dal 180 quante volte si può, o si divida 180 per 72, il residuo (non fattosi conto del quotiente) è 36, per 36 si divida il 72, e perchè il residuo di 36 sottratto due volte da 72 è zero, si conchiuda, che 36 è il massimo divisore comune de' dati numeri; è divisore comune, perchè li misura esattamente, mentre $36 \times 2 = 72$, e $36 \times 5 = 180$; è anche il massimo, come quello, che prima d'ogni altro divisore gli divide senza resto.

LXV. La soluzione di questo problema si dà analitica, e generale con la sua dimostrazione totalmente nuova dal P. Vincenzo Ric-

cati

cati nelle sue istituzioni analitiche lib. 1. cap. 2. num. 15. e segu. Stimo cosa opportuna il tradurla per comodo de principianti. Premette il dottissimo autore, e dimostra il seguente

LEMMA

Se due quantità A maggiore, B minore sieno esattamente divisibili per un'altra P: Dico, che divisa l'A per la B, se v'ha qualche residuo C, anch' esso sarà esattamente divisibile per la P.

A B
C D
P

Si dimostra. Il quotiente di A diviso per B sia m: Dunque $mB + C = A$; potendosi pertanto A dividere esattamente per P, anche $mB + C$ potrassi esattamente dividere per la stessa P; ma ancor B esattamente si divide per P, e in conseguenza anche mB: Dunque vopo e, che per la P si divida esattamente ancor esso il residuo C. Il che doveva dimostrarsi.

LXVI. Da ciò si deducono due Corollarj: 1. Poichè B, e C sono esattamente divisibili per P, se B dividasi per C in modo, che

che il residuo sia *D*, in vigor della dimostrazione anche *D* sarà divisibile esattamente per *P*. Per simile maniera si potrà esattamente dividere per *P* il residuo *E*, che resti fatta la divisione di *C* per *D*, e così in avanti sino ad arrivare al residuo, che sia zero.

II. Due cose possono quì accadere; perochè o l'ultimo residuo è alla *P* eguale, o è di essa maggiore (non potendo esser minore, perchè ogni residuo è esattamente divisibile per *P*), nel primo caso già *P* è il massimo comune divisore di *A*, e di *B*, mentre una quantità maggiore non potrebbe esattamente dividere tutt'i residui, non potendo dividere quest'ultimo; nel secondo caso la *P* sarebbe sì bene divisor comune, dividendo anche l'ultimo residuo, ma non sarebbe il massimo, potendosi l'*A*, e la *B* dividere per l'ultimo residuo.

LXVII. Si deve quì avvertire, che abbiam diviso *B* per *C*, *C* per *D*, perchè abbiam supposto, diminuirsi successivamente i residui. Ma quando accadesse, che qualche residuo, per es. *D* fosse maggiore di *C*, allora dovrebbe dividersi *D* per *C*, e 'l residuo sarebbe ancor divisibile per *P*, come costa dal Lemma.

LXVIII. Or in questo Lemma sì chiaramente dimostrato si contiene la pratica di trovare

re

re il maſſimo comune diviſore di due quantità analitiche, applicando al caſo noſtro il metodo eſpoſto nel n. 64. Si cerchi il maſſimo comune diviſore delle formole *A*, *B* ordinate ſecondo la lettera *x* (Che coſa ſignifichi, l'eſſere le formole ordinate ſecondo una qualche lettera, ſi dirà a ſuo luogo).

$A.\ -x^3+ax^2-c^2x+ac^2$	$B.\ -x^2+\overline{a-y}\times x+ay$
$M.\ -x^3+ax^2-yx^2+ayx$	$Q.\ -x^2+ax$
$C.\ yx^2+\overline{c^2+ay}\times -x+ac^2$	$E.\ -yx+ay$
$N.\ yx^2-ayx+y^2x-ay^2$	$P.\ -x+a$
	$K.\ -x+a$
$D.\ \overline{c^2+y^2}\times -x+ac^2+ay^2$	$0 \quad 0$

Quotienti

x

$-y$

$\dfrac{x}{c^2+y^2}$

$\dfrac{1}{c^2+y^2}$

Si divida il primo termine della formola *A* per il primo termine della formola *B*; e 'l prodotto del quotiente *x* nel diviſore *B*, cioè la quantità *M*, ſottraggaſi da *A*: il reſiduo ſarà *C*. Queſto dividaſi nell' iſteſſa maniera per *B*, da cui ſi ſottragga la quantità *N*, ch'è il prodotto di *B* nel quotiente $-y$, e

s'avrà

s' avrà l' altro residuo D; e perchè in questo residuo la dignità di x è minore, che in B, perciò s' inverta l'ordine, e B dividasi per D, e da esso si sottragga Q ch' è il prodotto di D nel quoziente $\frac{x}{c^2 + y^2}$; il terzo residuo sarà E, qual diviso per y (che si trova in tutti li termini) s' avrà la quantità P. Questa divisa per D, e sottrattone il prodotto di D nel quoziente $\frac{1}{c^2 + y^2}$, cioè la quantità K, il residuo sarà zero. Dunque la quantità P è il massimo comune Divisore, che si cercava, com' è manifesto per il Lemma dimostrato.

IXIX. E perchè ciò meglio s'intenda, la discorro così: Se essendosi P diviso per D, il residuo è zero, segno è, che P esattamente divide la quantità D. Dunque esattamente ancora dividerà D moltiplicato per $\frac{x}{c^2 + y^2}$ cioè la quantità Q; e poichè P nell' istessa maniera divide la E, dividerà anche $Q + E$, cioè B; dunque anche B moltiplicato per y, cioè N; Dunque anche $N + D$, cioè C sarà esattamente diviso per P. Ma similmente B in x cioè M esattamente dividesi per P; Dunque anche

anche $M + C$, cioè l'istesso A; e in conseguenza A e B esattamente dividonsi per P; e perciò P è il comune divisore. Ma è anche il massimo, perchè niun'altra quantità perfettamente dividerebbe l'ultimo residuo. Il che s'avea a dimostrare.

CAPO II.

Del Sommare, e Sottrarre i Rotti.

LXX. ACciocchè le frazioni si sommino, o trà se si sottraggano, vopo è, che sieno dell'istessa denominazione. Che se tali non sieno, vi si riducano per il probl. I. E se sono composte, si facciano semplici (n.57.) e occorrendo si riducano a più semplice espressione per il probl. IV., le quali cose supposte, sia il

PROBLEMA V.

Sommare le frazioni.

LXXI. SI aggiungano i numeratori, e alla somma soscrivasi il denominator comune. Così la somma di $\frac{2}{7}$, e $\frac{3}{7}$, sarà $\frac{5}{7}$, di $\frac{a}{c}$, e $\frac{b}{c}$

sarà

ſarà $\frac{a+b}{c}$, e la ſomma di $\frac{2a-b}{d+c}$, è $\frac{2b-a}{d+c}$ ſarà $\frac{a+b}{d+c}$. La ragione è la ſteſſa, che negl'intieri, perochè 2, e 3 insieme giunti fanno ſempre 5' qualunque eſſe sieno le coſe, che si giungono o tutti, o parti; e siccome 2 e 3 palmi fanno 5 palmi, così 2 e 3 ſemipalmi fanno 5 ſemipalmi, 2 e 3 terze parti, fanno 5 terze parti &c.

LXXII. A ſommare le tre frazioni di diverſo nome $\frac{c}{a+b}$, $\frac{d}{a-b}$, $\frac{x}{u}$, si riducano prima all'iſteſſo nome $\frac{cau-cbu}{a^2u-b^2u}$, $\frac{dau+dbu}{a^2u-b^2u}$, $\frac{a^2x-b^2x}{a^2u-b^2u}$; indi li numeratori giunti insieme, s'avrà la ſomma

$$\frac{cau-cbu+dau+dbu+a^2x-b^2x}{a^2u-b^2u}.$$

LXXIII. Se poi sieno miſchiati intieri e rotti, allora si faccia la ſomma degl'intieri ſeparatamente da quella de' rotti, ovvero, riducendosi prima gl'intieri a' rotti per il probl. III, ſe ne faccia la ſomma. Così la ſomma di $5\frac{2}{3}$, e di $7\frac{3}{4}$ ſarà $12\frac{17}{12}=13\frac{5}{12}$ per il probl. II; overo per il probl. III. ſarà $\frac{161}{12}$, e di nuovo

nuovo per il probl. II.$=13\frac{5}{12}$. E la ſomma di $2a+\frac{b}{c}$, e di $x+\frac{d}{c}$, è $\frac{2ac+b+cx+d}{c}$.

PROBLEMA VI.

Sottrarre le frazioni.

LXXIV. RIdotte prima le frazioni, ſe sieno di diverſo nome, all'iſteſſo, il numeratore della frazione, che deve ſottrarsi, si tolga dal numerator dell'altra, e al residuo si ſoſcriva il denominatore, ch'è comune. Per eſ. da $\frac{3}{5}$ si ſottrae $\frac{2}{5}$, ſcrivendo $\frac{3-2}{5}=\frac{1}{5}$. Così da $\frac{a}{b}$ ſottratto $\frac{c}{b}$ il reſto è $\frac{a-c}{b}$ e da $\frac{a+b}{d+c}$ ſottratto $\frac{2b-a}{d+c}$, il reſto è $\frac{2a-b}{d+c}$. Se le frazioni ſieno miſte, allora o gl'intieri dagl' intieri, e i rotti da rotti ſeparatamente ſi ſottraggano, o ridotti gl'intieri alla denominazione de' ſuoi riſpettivi rotti ſi faccia ſecondo la data regola la ſottrazione. Così da $6\frac{3}{8}$ tolto $4\frac{1}{8}$, il reſto è $2\frac{2}{8}$ overo $\frac{51}{8}-\frac{33}{8}=\frac{18}{8}$, cioè, come prima, $=2\frac{2}{8}$. Da $\frac{2b}{d+a}$ tolto $\frac{a+b-d}{d+a}$ la differenza è $\frac{2b-a-b+d}{d+a}=\frac{b-a+d}{d+a}$.

CA-

CAPO III.

Del moltiplicare, e dividere i rotti.

LXXIV. La moltiplicazione, e divisione delle frazioni non ha difficultà. o sieno dell'istessa, o di diversa denominazione.

PROBLEMA VI.

Moltiplicare insieme i rotti, o gl'intieri co'rotti.

LXXV. Si moltiplichino insieme i numeratori, e dipoi i denominatori con soscrivere al primo prodotto il secondo. Così $\frac{2}{5}$ in $\frac{3}{7} = \frac{6}{35}$, perchè $\frac{2 \times 3}{5 \times 7} = \frac{6}{35}$, e $\frac{a}{c}$ in $\frac{ed}{f} = \frac{a \times ed}{c \times f} = \frac{aed}{cf}$. L'istesso è, se un de fattori sia un'intiero, basta moltiplicare per l'intiero il numeratore. Così 2 in $\frac{3}{7} = \frac{6}{7}$, perchè $\frac{2 \times 3}{1 \times 7} = \frac{6}{7}$ e $\frac{a}{b}$ in c non è altro che il prodotto di a in c diviso per b, $= \frac{ac}{b}$. Quindi se il moltiplicator della frazione fosse eguale al denominatore, il prodotto sarebbe un'intiero eguale al numeratore; a cagion d'es. $\frac{a}{b}$ in $b = \frac{ab}{b}$ cioè $= a$. Suo-

le

le il prodotto dell' intiero pel rotto esprimersi anche scrivendo l' intiero dopo il rotto ; Onde $c \times \frac{a}{b}$ si scrive $\frac{ac}{b}$ overo $\frac{a}{b} c$, e $\frac{2}{3} \times ac$ si scrive $\frac{2ac}{3}$, overo $\frac{2}{3} ac$.

LXXVI. La ragione si rende manifesta per la stessa operazione ; imperochè se volendo io moltiplicare $\frac{4}{5}$ per $\frac{2}{3}$ moltiplicassi $\frac{4}{5}$ per 2, ne verrebbe il prodotto $\frac{8}{5}$, ch' è magior del giusto ; non per 2 adunque, ma per la terza parte di 2, cioè per $\frac{2}{3}$ devo moltiplicare $\frac{4}{5}$, e val quanto dire, che dopo aver moltiplicato 4 per 2, devo moltiplicare 5 per 3, perchè abbia il prodotto $\frac{8}{15}$, ch' è la terza parte di $\frac{8}{5}$; mentre moltiplicando per 2, avrei il doppio, moltiplicando per $\frac{2}{3}$ ho la terza parte del doppio.

PLOBLEMA VII.

Dividere i rotti, o il rotto per l' intiero, o l' intiero per il rotto.

LXXVII. SE si ha a dividere una frazione per l'altra, il numeratore della quantità da dividersi si moltiplichi per il denominator del-

la dividente, e 'l denominatore di quella per il numerator di questa. Sia per es. la frazione $\frac{2}{3}$ da dividersi per $\frac{4}{5}$, si moltiplichi 2 per 5, e 3 per 4, e s'avrà per quotiente $\frac{10}{12}$. Così $\frac{a}{b}$ diviso per $\frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$. E perchè ogn'intiero si può considerar come rotto, cioè come diviso per 1, quindi a dividere un'intiero per un rotto, basta, che l'intiero si moltiplichi per il denominatore del rotto, e il prodotto si divida per il numeratore. Così c diviso per $\frac{a}{b}$ dà il quotiente $\frac{cb}{a}$. E se si volesse diviso un rotto per un'intiero, come $\frac{a}{b}$ per c, basta moltiplicare il denominatore per l'intiero, e soscrivere il prodotto al numeratore, cioè $\frac{a}{cb}$. Ne' numeri $3 \div \frac{2}{4} = \frac{12}{2} = 6$, e $\frac{2}{4} \div 3 = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$.

LXXVIII. La ragione si fa manifesta per l'istessa operazione, che abbraccia come due parti, di cui l'una corregge l'altra. Di fatto quando io voglio dividere per es. $\frac{6}{35}$ per $\frac{3}{7}$, non cerco di dividere $\frac{6}{35}$ per l'intiero 3, ma per 3 diviso per 7, cioè per la 7.ª parte di 3, ch'è un divisore sette volte minore di 3. Onde

de ſe moltiplicaſſi ſoltanto il denominatore del rotto, che ſi ha a dividere, per 3, dividerei per un diviſore ſette volte maggior del giuſto, e la frazione, che ne verrebbe cioè $\frac{6}{105}$ ſarebbe ſette volte minor del giuſto; acciocchè dunque queſto difetto venga corretto, vopo è, che la frazione $\frac{6}{105}$ con un altra operazione ſette volte ſi prenda, chè val quanto dire, ſi moltiplichi per 7, ch' è il denominatore del diviſore: onde ne venga $\frac{42}{105}$ vero quotiente cercato. Ciò ſi conferma per la natura della diviſione diametralmente oppoſta alla moltiplicazione. Quindi ſe moltiplicando $\frac{a}{b}$ per c, abbiam da moltiplicare il numeratore per c, per ottenere il prodotto $\frac{ac}{b}$: volendo poi dividere $\frac{a}{b}$ per c, non moltiplicamo il numeratore, ma il denominatore per c, per averne il quotiente $\frac{a}{bc}$. Imperochè ſe è vero, non variarſi il valor della frazione, qualora i termini di eſſa per la ſteſſa quantità ſi moltiplicano (n. 53.) ne ſegue, che la moltiplicazione del numeratore ſia direttamenre oppoſta alla moltiplicazione del denominatore: onde la ſteſſa oppo-

sizione correndo tra la moltiplicazione, e la divisione, ne viene, che siccome la moltiplicazion della frazione si fa col moltiplicare il numeratore, così per l'opposito la divisione di essa s'ottiene col moltiplicare il denominatore.

LXXIX. E' da avvertire quì ciò, che altrove si è accennato, che la moltiplicazione e la divisione delle frazioni non sono, che per analogìa così dette, per la prima verificandosi, essere il prodotto ad un de fattori, come l'altro fattore all'unità, e per la seconda essere il quotiente all'unità come il dividendo al divisore. Laonde siccome nella moltiplicazione delle frazioni proprie, essendo l'unità maggiore della moltiplicante, la moltiplicanda eziandio è maggior del prodotto, così nella divisione delle medesime, essendo l'unità maggior della dividente, anche il quotiente è maggiore della dividenda.

LXXX. Quanto abbiam detto, e cogli esempj dichiarato della divisione delle frazioni, semplici, e positive, si può applicare alla divisione di frazioni composte per mezzo delle stesse regole, che sono universali. Quindi la frazione $\frac{yab - cab}{zxab}$ è eguale alla stessa divi-

sa

ſa per ab, cioè $= \frac{y-c}{2x}$, e $\frac{ab-ac}{-xb+xc} = \frac{a}{-x}$, overo $\frac{-a}{x}$. E ſe $\frac{a-x}{c+d}$ in a dà il prodottto $\frac{a2-ax}{c+d}$, $\frac{a-x}{c+d}$ diviſa per a dà il quotiente $\frac{a-x}{ca-ad}$.

CAPO IV.

Delle Frazioni decimali.

LXXXI. In vece delle Frazioni volgari, di cui ſi è trattato ne' capi precedenti, ſogliono adoprarſi da moderni le frazioni decimali non ſenza gran vantaggio del calcolo, che in eſſe non è punto differente dal calcolo degl' intieri. Imperochè ſiccome il valor delle note aritmetiche và ſempre creſcendo in proporzion decupla dal luogo delle unità in avanti, cioè da deſtra a ſiniſtra; così coll'iſteſſo metodo, e nella ſteſſa proporzione può il valor delle medeſime decreſcere dal luogo delle unità in poi, cioè da ſiniſtra a deſtra. Sicchè conformemente nel primo caſo ſignificano le decine, le centinaja, le migliaja &c. ſopra le unità, e nel ſecondo caſo ſignificano le parti decime, le centeſime, le milleſime ſotto le unità. Quindi perchè le decimali ſi ſcrivono l'una

dopo l'altra nell' istessa maniera che gl' intieri, per non confonderle cogl'intieri, da questi si separano con un punto. Per es. volendosi esprimere oltre cinque centinaja, tre decine, quattro unità anche due parti decime, sette centesime, si scriva così 534. 27; e se le decimali fossero sole senza intieri, allora posto un zero al luogo delle unità, e dopo zero il punto, succedono le decimali, 0. 35, cioè trè decime, e cinque centesime, ovvero, ch'è lo stesso, trentacinque centesime. Di più alle volte alle stesse decimali dopo il punto deve premettersi uno o più zeri, acciò questi occupando il luogo delle vacanti note, le altre che esistono, vengano nel luogo lor dovuto ad esprimere il vero suo valore. Così volendo esprimere tre millesime, perchè queste sono indicate dalla nota 3 posta nel terzo luogo dopo il punto, perciò al 3 premetto due zeri dopo il punto, e scrivo 0. 003.

LXXXII. La differenza dunque tra le frazioni volgari, e le decimali è questa, che le decimali avendo sempre per denominatore l'unità con uno, o più zeri, ommettono i denominatori, e ritengono i numeratori, i quali col diverso luogo, che occupano, vengono ad indicare i suoi proprj denominatori. Sicchè

chè le decimali ſcritte a modo di frazioni volgari, ſarebbero in queſta forma $\frac{3}{10}$, $\frac{4}{100}$, $\frac{5}{1000}$ &c., laddove ſcritte a modo d'intieri, s'eſprimono, come ſi è detto, così 0.345, ovvero, come altri ſogliono, diſtinguendoſi tra ſe co' numeri, o con virgolette in queſta guiſa 0. 3' 4'' 5''': le note numeriche ſono i numeratori, cioè indicano quante parti decimali ſi prendano, e i luoghi, che occupano, o i ſegni, con cui diſtinguonſi, moſtrano, quali parti ſieno ſe decime, o centeſime &c., facendo le veci de' Denominatori.

LXXXIII. Or premeſſe queſte coſe nient'è più facile del calcolo delle decimali a chi ben ſa il calcolo degl'intieri, dal quale non è punto differente. Quindi il ſommare, e'l ſottrarre le decimali, diſpoſte che ſieno in modo, che quelle, che ſono dell'iſteſſo grado, cioè dell'iſteſſa denominazione, ſi corriſpondano a colonna, e avuto ſempre riguardo al punto, che le diſtingue dagl'intieri, ſi fa coll'iſteſſe leggi della ſomma, e ſottrazione degl' intieri, come coſta dagli eſempj.

Sommare le decimali.

Esempio I.	Esempio II.
0. 346	
0. 092	45. 07
0. 0037	0. 7589
0. 8145	74 812
1. 2562	120. 6' 4'' 0''' 9''''

Sottrarre le decimali.

Esempio I.	Esempio II.
10. 574	437. 5
0. 896	98. 657
9. 678	338 8' 4'' 3'''

LXXXIV. Nella moltiplicazione delle decimali, ancorchè i fattori sieno misti d'intieri e di rotti, solamente si ha da avvertire, tante dover essere nel prodotto le decimali, cioè le note dopo il punto, quante ve ne ha nell'uno e nell'altro fattore. Che se il prodotto totale non avesse altrettante decimali, quante si trovano in ambedue i fattori, come nell' Es. II., allora i luoghi voti si devono supplire con altrettanti zeri verso la sinistra.

Es. I.	32. 12.	Es. II.	0. 347
	24. 3		0. 236

9636

9636	2082
12848	1041
6424	694
780. 516	0.081 892

E la ragione di ciò è, perchè i rotti decimali sono nel calcolo, come i zeri; onde siccome dovendosi moltiplicare due numeri, cui sieno annessi zeri, si hanno a mettere nel prodotto tanti zeri, quanti sono in ambedue i fattori, come 2000 × 300 fa 600000: così li decimali, che sono in luogo de' zeri, tanti debbono essere nel prodotto, quanti ve n' ha ne' fattori. L'istesso addiviene, se in vece de' decimali si mettono i rotti volgari, come nell' Es. I. in vece di 32. 12, e di 24. 3, si scriva $32\frac{12}{100}$, $24\frac{3}{10}$, questi ridotti in frazioni spurie per il probl. III., s'avrà $\frac{3212}{100}$, $\frac{243}{10}$; il prodotto di queste frazioni sarà per il probl. VI. $\frac{780516}{1000}$ = 780 . 516 secondo la data regola. Quindi avendosi a moltiplicare i decimali per l' unità con uno, o più zeri, come per 10, 100, 1000 &c. basterà pel prodotto separare col punto tante note nel moltiplicando, quanti zeri ha il moltiplicatore. Così o.

578 × 10 = 5.78 , 0 . 578 × 100 = 57 . 8 , 0 . 578 × 1000 = 578.

LXXXV. Per l' oppoſto poi nella diviſione delle decimali ; o queſte ſieno pure ; o miſte con intieri ; fatta già la diviſione di eſſe come ſe foſſero intieri , ſi ha da procurare , che il numero delle note decimali nel dividendo agguagli quello del diviſore inſieme e del quotiente ; e in conſeguenza che ſi ſeparino col punto nel quotiente tante decimali ; quante ve n' ha più nel dividendo ; che nel diviſore come ſi vede nell' eſ. I. Quindi ne viene in primo luogo ; che eſſendo eguale nel dividendo, e nel diviſore il numero delle decimali ; di queſte non ve n' ha nel quotiente ; come ſi vede nell' Eſ. II. In ſecondo luogo , che non eſſendovi decimali nel diviſore , tante ve ne ha nel quotiente , quante nel dividendo , come nell' eſ. III. Finalmente non eſſendovi , finita la diviſione ; tante decimali nel quotiente , quante fa duopo ſecondo la regola , ſi ſuppliſce co' zeri verſo la ſiniſtra , come nell'Eſ. IV.

Eſ. I.	Eſ. II.
0. 534) 0. 30438(0. 57.	8. 45) 295 . 75 (35
Eſ. III.	Eſ. IV.
436)34240.456(78.533	957.)7.25406(0.00758

SE-

SEZIONE III.

Calcolo Esponenziale, e Radicale.

LXXXVI. IL primo di questi calcoli, di cui nella presente sezione tratteremo, è una specie di moltiplicazione, e il secondo è una specie di Divisione, da moderni perciò giustamente detti l'uno *Involuzione*, l'altro *Evoluzione* delle quantità. Noi li chiamamo *Esponenziale*, e *Radicale*, perchè in quello si adoperano gli Esponenti, in questo le Radici; e prima di venirne alla spiegazione, premettiamo secondo il nostro metodo i seguenti

PROLEGOMENI

Circa le potestà, e le radici.

LXXXVII. Potestà, o potenza, o come altri chiamano, Dignità d'una qualunque Quantità è la stessa quantità o considerata in se medesima, o per se medesima moltiplicata. Si distingue in varj gradi secondo che più volte si moltiplica; e siccome potestà prima è la stessa

ſteſſa quantità non moltiplicata, così poteſtà ſeconda è la quantità moltiplicata una volta per ſe ſteſſa, poteſtà terza è la quantità moltiplicata due volte per ſe ſteſſa, e così in avanti. Sicchè ſe *a* è la poteſtà prima d'una data quantità, *aa* è la poteſtà ſeconda, *aaa* è la terza, *aaaa* è la quarta, e così all' infinito. Per una certa analogia queſti diverſi gradi prendono anche la dinominazione dall' eſtenſioni geometriche in guiſa, che la prima poteſtà *a* ſi dica anche la linea o il lato, la ſeconda *aa* il quadrato, che ha due dimenſioni, come la linea ne ha una ſola, *aaa* il cubo, che ne ha tre. Così il numero, per eſ. 2 è il lato, perchè conſiderato come radice è d'una ſola dimenſione, $2 \times 2 = 4$ è il quadrato, perchè di due dimenſioni eguali; $2 \times 2 \times 2$ è il cubo, perchè di tre dimenſioni eguali.

LXXXVIII. Ma l'eſtenſion geometrica, e locale non può ammettere più di tre dimenſioni, che ſono in lungo, in largo, e in profondo, e perciò non ha che trè poteſtà, cioè la linea, o radice, il quadrato, e 'l cubo. L'algebra però come Scienza ch'è aſſai più aſtratta, non ſi reſtringe come la Geometria alle ſole locali eſtenſioni, ma paſſa alle altre ſenza fine, inalzando conſeguentemente le quantità

tità non solo alla seconda potestà, cioè al quadrato, e alla terza, cioè al cubo, ma anche alla quarta, alla quinta, alla sesta &c., cioè al quadrato-quadrato, al quadrato-cubo, al cubo-cubo &c. Ad indicar queste potestà si serve per maggior comodo de' numeri sovraposti alla lettera in modo, che a, overo a^1 significhi la potestà prima di a, a^2 la seconda, a^3 la terza, in vece di scrivere a, aa, aaa &c. qual modo sarebbe assai nojoso, specialmente se molto cresca la potestà, perchè s'avrebbe a replicar molte volte la stessa lettera.

LXXXIX. I numeri lateralmente sovraposti alla lettera si dicono *Esponenti*, overo *Indici*, perchè espongono, e indicano le dette potestà, e le distinguono in varj gradi, formandone, quando sono disposti in ordine, una serie di quantità continuamente proporzionali in proporzion geometrica, le quali son tra se, come l'unità, ch'è il primo termine della serie, alla quantità stessa considerata come radice. Quindi è, che gli Esponenti sono tra se in progressione aritmetica, cioè formano una serie di continuamente proporzionali in proporzione aritmetica, cominciando dal zero, ch'è l'esponente dell'unità, nella seguente forma 1^0, a^1, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6, a^7 &c. Di fat-

to ſe a ſignifica 2, $a^2 = 4$, $a^3 = 8$, $a^4 =$ 16 &c. Ma 2, 4, 8, 16 ſono tra ſe, come 1 *a* 2, e formano una progreſſione geometrica, mentre gli eſponenti 1, 2, 3, 4 formano una progreſſione aritmetica: onde, come diremo a ſuo luogo, ſi chiamano *logaritmi*.

XC. Tre coſe ſi devono quì avvertire: la prima è la differenza, che paſſa tra i Coefficienti, e gli Eſponenti, per eſ. tra $2a$, e a^2, poiche $2a$ ſignifica il doppio di a, a^2 la quantità a moltiplicata per ſe ſteſſa, onde ſe a val 4, $2a$ ſarà 8, a^2 ſarà 16. La ſeconda, che il nome di poteſtà è relativo; onde la ſteſſa poteſtà può eſſere ſuperiore, e inferiore, ſecondo che ſi riferiſce a diverſe quantità. Così a^6 è la poteſtà ſeſta di a, la poteſtà terza di a^2, la poteſtà ſeconda di a^3. La terza, che quando per eſponenti ſi trovano le lettere m, n e ſimili, in vece de' numeri, queſte eſpongono una qualche poteſtà indeterminata; come a^m, b^n &c. ſignificano una poteſtà qualunque di a, di b da determinarſi per quello, che m, overo n ſignifica.

XCI. La poteſtà può eſſere *poſitiva*, ſe ha per eſponente un numero poſitivo, e *negativa*, ſe ha per eſponente un numero negativo, come a^{-1}, a^{-2}, a^{-3} &c., e ſignifica l' unità

tà

tà divisa per la potestà indicata dall'esponente, cioè a, $a^{\frac{1}{2}}$, $a^{\frac{1}{3}}$. E a ben intendere ciò si deve supporre dalle regole de' Logaritmi, e degli esponenti, come a suo luogo diffusamente diremo, che in ogni progressione geometrica, la quale cominci dall'unità, se dall'esponente del Dividendo si tolga l'esponente del Divisore, il residuo sarà l'esponente del quotiente. Or posta la progression geometrica di sopra esposta, se si voglia dividere a^0 per a^1 l'esponente sarà $0-1=-1$, e in consequenza il quotiente sarà a^{-1}. Così diviso a^{-1} per a^1, l'esponente sarà $-1-1=-2$, e'l quotiente a^{-2}; e diviso a^{-2} per a^1, l'esponente sarà $-2-1=-3$, e 'l quotiente a^{-3}. Onde coll'istesso metodo inoltrandoci avremo un'altra serie di potestà, i di cui esponenti costituiscono una progressione aritimetica negativa di numeri naturali, qual'è a^{-1}, a^{-2}, a^{-3}, a^{-4} &c. E poiche a^0 è l'istesso che 1, essendo il primo termine della progression geometrica, che comincia da 1, se in vece di a^0 si metta l'unità, e questa si divida per a^1, il quotiente sarà $\frac{1}{a^1}=a^{-1}$; se $\frac{1}{a^1}$ si divida per a^1,

il

il quotiente sarà $\frac{1}{a^2} = a^{-2}$; nell' istesso modo $\frac{1}{a^2}$ diviso per a^1 darà $\frac{1}{a^3} = a^{-3}$ &c. Laonde le potestà negative non sono altro che frazioni, le quali hanno per numeratore sempre l'unità, e per denominatori quelle stesse potestà considerate come positive; e perciò in due maniere può la stessa serie esprimersi, cioè

a^{-1}, a^{-2}, a^{-3}, a^{-4}, a^{-5}, a^{-6} &c.

$\frac{1}{a^1}$, $\frac{1}{a^2}$, $\frac{1}{a^3}$, $\frac{1}{a^4}$, $\frac{1}{a^5}$, $\frac{1}{a^6}$ &c.

XCII. Quindi chiaro si scorge, che sebbene le dette potestà si chiamino negative per l'esponente negativo, che hanno, a differenza delle positive, che hanno l'esponente positivo, in realtà però sono quantità positive, perchè indicano l'unità divisa per le potestà positive, e formano, disposte in serie, una progressione decrescente all' infinito; di fatto se $a^1 = 4$, sarà $\frac{1}{a^1} = a^{-1} = \frac{1}{4}$; $\frac{1}{a^2} = a^{-2} = \frac{1}{16}$; $\frac{1}{a^3} = a^{-3} = \frac{1}{64}$ &c. e questa progressione è direttamente opposta all' altra, che si chiama ascendente, o crescente all' infinito, come si vede nelle seguenti serie, che sono simbo-

ſimboli delle due contrarie progreſſioni $a^{-\infty}$ &c.

a^{-3}, a^{-2}, a^{-1}, a^{0}, a^{1}, a^{2}, a^{3} &c. a^{∞} &c.

$\frac{1}{64}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{4}$, 1, 4, 16, 64 &c.

Ove poſto $a^{1} = 4$ ſi vede, che i valori de' termini a^{0}, a^{1}, a^{2} &c. continuamente creſcono, e a^{∞} ſimbolo del termino infinitamente diſtante, è di valore infinito; e che all' oppoſto i valori de termini a^{-1}, a^{-2}, a^{-3} &c. continuamente decreſcono, e $a^{-\infty}$ è di valore infinitamente piccolo, perchè ſarebbe l' unità diviſa all'infinito.

XCIII. Sempre che gli eſponenti delle poteſtà ſono numeri intieri, le poteſtà ſi dicono *perfette*, come ſono quelle, di cui abbiam parlato ne' num. precedenti. Ma v' ha un' altra ſorte di poteſtà detta *imperfette*, gli eſponenti delle quali ſono frazioni; e perchè ben s'intenda la natura di queſte poteſtà, da altri nominate anche *frazionarie*, premetto, che quando l' eſponente dell' unità è il zero, in quella ſerie allora la metà dell' eſponente di qualunque poteſtà è l' eſponente della radice quadrata della medeſima, la terza parte di quel primo eſponente è l' eſponente della radice cubica, e così in avanti. Siccome adunque la radice quadrata della poteſtà a^{6} è a^{3}, perchè la

metà

metà dell' esponente 6 è $\frac{6}{2} = 3$, così la radice quadrata di a^1 altra esser non può, se non che $a^{\frac{1}{2}}$, dovendo l' esponente esser la metà di 1, e la radice cubica dell' istesso a^1 è $a^{\frac{1}{3}}$, e la quadrato-quadrata $a^{\frac{1}{4}}$, e così all' infinito. Sicchè le potestà imperfette, che hanno per esponente una frazion positiva, altro non sono, che le radici delle stesse potestà positive, in cui il denominatore esprime il grado, o la qualità della radice o quadrata, o cubica, o di qualsivoglia altro grado, e il numetore dinota l'ordine o la qualità della potestà, da cui si è estratta la radice; Così $a^{\frac{1}{3}}$ esprime la radice terza, o cubica della prima potestà di a; $b^{\frac{2}{3}}$ la radice cubica della seconda potestà di b, cioè di b quadrata; Ed ecco come queste potestà servono ad abolire il segno radicale $\surd$, da altri detto vincolo radicale, adoperato dagli Algebristi per indicare le radici. La prima radice, ch' è la stessa quantità, non ha segno alcuno, nè ha verun' uso nel calcolo radicale. Le altre radici tutte hanno

no il ſegno $\sqrt{}$, e ſi diſtinguono per mezzo degli eſponenti, che altri ſcrivono a deſtra del ſegno, in queſto modo $\sqrt{}^2$, $\sqrt{}^3$, &c., altri lo pongono ſopra il ſegno $\sqrt[2]{}$, $\sqrt[3]{}$ &c., e ſignificano radice ſeconda, o quadrata, radice terza o cubica, e così in avanti; nella radice ſeconda ſi ſuole ommettere l'eſponente in modo che $\sqrt{a}$ è l' iſteſſo che $\sqrt{}^2\, a$. La prima maniera di eſprimere le radicali, che inventarono, e poſero in uſo i primi Nevvton, e 'l Leibnitz, prevale alla ſeconda in quanto, che in quella maniera le radicali, o le quantità, che chiamano irrazionali e incommenſurabili ſi riducono a foggia di razionali, ed eſſendo poteſtà imperfette, non altrimente, che le perfette, al calcolo ſi ſottopongono.

XCIV. E ſiccome le poteſtà imperfette poſitive ſono le radici delle perfette poſitive, così v' ha anche le poteſtà imperfette negative, che ſi conſiderano come radici delle poteſtà perfette negative: Onde ſiccome la radice quadrata di a^1 è $a^{\frac{1}{2}}$, e la radice cubica della medeſima è $a^{\frac{1}{3}}$, così la radice quadrata di a^{-1} è $a^{-\frac{1}{2}}$, la cubica $a^{-\frac{1}{3}}$, e così all' infinito; e

queste radici anch'esse si esprimono col segno radicale, cioè $\sqrt[2]{\frac{1}{a^1}} = a^{-\frac{1}{2}}$, $\sqrt[3]{\frac{1}{a^1}} = a^{-\frac{1}{3}}$ &c. Sicchè siccome le potestà perfette ordinate in serie costituiscono o ascendendo, o discendendo una progressione geometrica dall' unità, e i loro esponenti una progressione aritmetica dal zero, in tal forma

$$a^{-3},\ a^{-2},\ a^{-1},\ a^{0},\ a^{1},\ a^{2},\ a^{3}\ \&c.$$

$$\frac{1}{64},\ \frac{1}{16},\ \frac{1}{4},\ 1,\ 4,\ 16,\ 64\ \&c.$$

Così parimente le loro radici formano somiglianti progressioni, in questo modo

$$a^{-\frac{3}{2}},\ a^{-\frac{2}{2}},\ a^{-\frac{1}{2}},\ a^{0},\ a^{\frac{1}{2}}\ a^{\frac{2}{2}},\ a^{\frac{3}{2}}$$

overo $\sqrt[2]{\frac{1}{a^3}}, \sqrt[2]{\frac{1}{a^2}}, \sqrt[2]{\frac{1}{a^1}}, 1, \sqrt{a^1}, \sqrt{a^2}, \sqrt{a^3}$; ov' è da notarsi, che gli esponenti della progressione sono -3; -2, -1, 0, 1, 2, 3 in progressione aritmetica.

CAPO I.

La Formazione delle potestà.

XCV. IL formar le potestà de' numeri o delle quantità letterali semplici, non ha difficultà, bastando il moltiplicarle tante volte, quante unità porta l' esponente, toltane una.

una.

una. Così ad elevare il numero 2 alla seconda potestà, cioè al quadrato, si moltiplichi 2 per se stesso una volta, sarà $2 \times 2 = 4$; e ad elevarlo alla terza, cioè al cubo, si moltiplichi due volte per se stesso, e sarà $2 \times 2 \times 2 = 8$. Così anche il quadrato della frazione $\frac{1}{3}$ è $\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$ e 'l cubo della medesima è $\frac{1}{9} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{27}$; E la seconda potestà di $a^2 b$ è $a^4 b^2$, la terza è $a^6 b^3$. Sicchè secondo le regole del moltiplicare s' eleverà una data quantità a qualsivoglia potestà, se tante volte si prenda l' esponente, quante volte il richiede l'indice della nuova potestà, a cui si voglia elevare, o ch' è lo stesso, se l' esponente della proposta quantità si moltiplichi per il nuovo indice. Per questo nell' es. poco fa addotto si è detto, che la seconda potestà di $a^2 b$ è $a^4 b^2$, perchè si ha da prendere l' esponente 2 di a due volte, e l'esponente 1 di b altresì due volte; e la terza potestà è a^6, b^3, perchè mettendo 2 tre volte fa 6, e mettendo 1 tre volte, fa 3. E generalmente volendosi elevare a^m alla potestà n, si farà a^{mn}, ch' è di a^m la potestà n^{esima}. E poichè il prodotto del meno nel meno è sempre positivo (n. 30.) quindi è, che la radice quadrata di a^2 può essere così a,

come $-a$, cioè $\pm a$; non così della cubica, perchè il cubo di a è a^3, di $-a$ è $-a^3$; e generalmente parlando la radice d'indice pari sarà sempre positiva, o negativa; d'indice dispari sarà positiva, se positiva è la quantità proposta, negativa, se quella è negativa.

XCVI. Tutto il difficile consiste nel formar le potestà delle quantità composte, o *polinomie*, perchè non basta, ad elevare per es. il binomio $a+b$ alla seconda potestà, scrivere $a+b^2$ seppur non si volesse accennata soltanto, non eseguita l'operazione, e allora basterebbe sovraporre al binomio la lineetta orizzontale coll' indice, in questa forma $\overline{a+b}^2$, e questo significa, che il detto binomio si ha da intendere elevato alla seconda potestà. Ma a perfezionare il sudetto quadrato, bisogna distinguer le parti, di cui costa il quadrato del binomio: C'insegna Euclide nella 4. del lib. II. che il quadrato d'una quantità divisa in due parti si compone de' quadrati delle parti, e del doppio prodotto delle parti medesime insieme moltiplicate, e perciò il quadrato di $a+b$ è $a^2+2ab+b^2$; il che risulta ancora, se $a+b$ si moltiplichi per $a+b$. Similmente il cubo del binomio si compone da' cubi delle parti, dal triplo

di

di ciò, che proviene moltiplicando il quadrato della prima parte nella seconda, e del triplo di ciò, che parimente proviene moltiplicando il quadrato della seconda parte per la prima, e sarà $a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3$; il che s'ottiene ancora moltiplicando il quadrato già trovato $a^2 + 2ab + b^2$ per la radice $a + b$.

XCVII. Riguardo a' segni si ha da osservare la stessa regola, che si è data per la moltiplicazione (n. 30); Imperocchè la quantità, da cui nasce la potestà, o è positiva, o negativa. Se positiva, già è chiaro, che ogni qualunque potestà di essa sarà quantità positiva, come a^2, a^3, a^{-2}, a^{-3}, perchè nel formarsi queste potestà sempre il positivo si moltiplica pel positivo. Se poi è negativa; allora si hanno a distinguere le potestà pari, cioè che hanno l'esponente di numero pari, dalle dispari, il di cui esponente è dispari: quelle sempre daranno una quantità positiva, perchè in esse il negativo sempre si moltiplica per il negativo; le altre daranno una quantità negativa, perchè in queste il negativo si moltiplica per il positivo. Laonde della quantità $-a$ la potestà seconda è a^2 quantità positiva, perchè si produce da $-a$ in $-a$; ma la potestà terza è $-a^3$, perchè nasce da $a^2 \times -a$;

 e la

e la poteſtà terza del binomio $a - b$ ſarà $a^3 - 3a^2 b + 3ab^2 - b^3$ per gli eſponenti diſpari di b^1, b^3. E generalmente qualunque poteſtà pari n di qualunque quantità ſempre ſignifica quantità poſitiva; ed è impoſſibile, che ſi trovi una quantità qualunque, la cui poteſtà pari ſia quantità negativa.

XCVIII. Non vi ſarebbe altro da aggiungere circa la formazion delle poteſtà, che come coſta dal detto, ſi può eſſeguire per mezzo della moltiplicazione, e con le ſole regole di eſſa. Ma perchè queſta ſuol eſſere per le quantità molto compoſte, e riguardo alle poteſtà di più alto grado una fatiga lunga del pari e nojoſa, perciò i moderni Algebriſti niente hanno traſcurato per rendere più agevole, e comoda l'operazione. A tal'uopo hanno inventato delle formole generali, per cui qualunque quantità a qualſivoglia poteſtà venga ad elevarſi. Per formola poi s'intende una qualunque eſpreſſione analitica ſemplice, o compleſſa, le di cui lettere ſieno come indeterminate, in modo, che tutto ciò, che di eſſa formola ſi dice, s'intenda di qualunque altra d'altre lettere compoſta, ma ad eſſa ſimile. Perchè però meglio s'intenda il metodo di ſtendere una formola generale adattabile a qualſivo-

ſivoglia poteſtà, premetto in due lemmi prima il modo di trovare i termini delle poteſtà, per ſecondo i coefficienti de' termini.

L E M M A I.

Ritrovare tutt' i termini delle poteſtà di qualunque data quantità.

XCIX. Poichè ogni Polinomio ſi può ridurre a binomio, perciò quello che ſi dirà del binomio, s' intenda d'ogni polinomio. Sia dato il binomio $a + b$, e ſi vogliano tutt' i termini della quinta poteſtà di eſſo. Si facciano delle due lettere del dato binomio due progreſſioni geometriche, e la prima cominci dalla poteſtà cercata della prima lettera, in giù calando per le poteſtà inferiori fino all' unità, l' altra per l' oppoſto dall' unità ſalendo per tutte le poteſtà dell'altra lettera, o parte del binomio fino ad arrivare alla poteſtà cercata. Dipoi moltiplicando inſieme i termini dell' una e dell' altra progreſſione, per ordine cominciando dalla ſiniſtra, s'avranno tutt' i termini della poteſtà, che ſi cerca, in queſto modo

Serie

Serie I. a^5 , a^4 , a^3 , a^2 , a^1 , 1
Serie II. 1 , b , b^2 , b^3 , b^4 , b^5

Termini di $a+b^5$ a^5 , a^4b , a^3b^2 , a^2b^3 , ab^4 , b^5

Coll' istesso metodo si possono trovare i termini di qualunque altra potestà inferiore, o superiore; ov' è da osservarsi, che il numero de' termini sempre è uno di più dell' espresso dall' esponente della potestà, che si cerca, come nell' es. addotto essendo l' esponente 5, i termini sono sei; e in conseguenza nella potestà seconda tre devono essere i termini, quattro nella terza, nella quarta cinque &c. Dippiù gli estremi termini contengono sempre le potestà delle parti, ma di quel grado stesso, a cui si cerca elevare il binomio, cioè contengono i soli quadrati delle parti, se il binomio hassi ad elevare alla seconda potestà, i soli cubi, se alla terza, e così in avanti; ne' termini però intermedj s' avranno le altre potestà inferiori delle medesime parti tra loro moltiplicate.

L E M M A II.

Ritrovare i Coefficienti delle potestà per es. d' un binomio

C. Due metodi si sogliono recare, che battendo quasi all' istesso, si possono ridurre

durre ad un ſolo in due maniere propoſto. La prima maniera è del famoſo Ougthred, il quale dà il nome di Oncie a Coefficienti, e in tal modo li determina. L'eſponente del primo termine è il Coefficiente del ſecondo. Queſto moltiplicato per l'eſponente della prima parte del ſecondo termine, diviſo per 2 dà il coefficiente del terzo termine, e così di mano in mano ſi hanno i coefficienti de' ſuſſeguenti termini, ſe il coefficiente del termine già trovato ſi moltiplichi per l'eſponente della prima parte dello ſteſſo termine, e 'l prodotto ſia diviſo per 3, per 4, per 5, &c. ſucceſſivamente ſecondo il numero de' termini. Acciò ſi abbiano per eſ. li coefficienti de' termini già trovati per il precedente lemma della poteſtà quinta del binomio $a+b$, Secondo la regola già data l' eſponente del primo termine, ch'è 5, è il coefficiente del ſecondo; onde ſi ha $5a^4 b$. Dipoi 5×4 (eſponente della prima parte del ſecondo termine) e il prodotto $20 \div 2, = 10$ è il coefficiente del terzo, il quale perciò è $10\,a^3 b^2$. Similmente 10×3, e l' prodotto $30 \div 3$ dà il coefficiente al quarto, ch' è $10a^2 b^3$. Finalmente 10×2 (eſponente della prima parte del quarto termine) e 'l prodotto $20 \div 4$ dà $5ab^4$. Dunque la

la quinta potestà di $a+b$ co' suoi coefficienti sarà $a^5 + 5a^4 b + 10a^3 b^2 + 10a^2 b^3 + 5ab^4 + b^5$.

CI. L'altra maniera più adattata alla formola generale è la seguente. Si facciano due serie di numeri; l'una cominci dall'esponente della potestà cercata, e finisca nell'unità; l'altra al contrario cominci dall'unità, e finisca nel detto esponente: De' numeri ben situati nell'una e nell'altra serie, e tra se corrispondenti si formino altrettante frazioni; la prima è il coefficiente del secondo termine, dipoi a due a due moltiplicare, cioè la prima e la seconda, la seconda e la terza &c. i loro prodotti ridotti ad intieri daranno successivamente tutt'i coefficienti. Coll'esempio la cosa si farà chiara. Si cercano i coefficienti della potestà VI. di $a+b$.

Serie I. 6, 5, 4, 3, 2, 1.
Serie II. 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Ridotti i numeri corrispondenti a frazioni, sarà $\frac{6}{1} = 6$ il coefficiente del secondo termine; $\frac{6}{1} \times \frac{5}{2} = \frac{30}{2} = 15$ il coefficiente del terzo; $\frac{30}{2} \times \frac{4}{3} = \frac{120}{6} = 20$ il coefficiente del quarto; $\frac{120}{6} \times \frac{3}{4} = \frac{360}{24} = 15$, il coefficiente del quinto; $\frac{360}{24} = \frac{30}{2} \times \frac{2}{5}$

$=$

$=\frac{60}{10}=6$ il coefficiente del ſeſto termine. Con queſto metodo trovo i coefficienti di $a+b$ elevato dalla ſeconda ſino alla ſeſta poteſtà.

$$\text{Poteſtà di } a+b \begin{cases} \text{II.} & a^2+2ab+b^2 \\ \text{III.} & a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \\ \text{IV.} & a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4 \\ \text{V.} & a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5 \\ \text{VI.} & a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+b^6. \end{cases}$$

CII. Che ſe qualche numero preceda o ambedue, o una delle due parti del binomio, che deve inalzarſi a qualunque poteſtà; per eſ. ſe debba inalzarſi alla poteſtà terza $a+2b$, ſi trovi prima ſecondo la regola la terza poteſtà di $a+b$; poi ſi elevi il num. 2, coefficiente di b, alle ſteſſe poteſtà, a cui ſi trova elevata in ciaſchedun termine la quantità b, e poichè 2, 4, 8 ſono le poteſtà prima, ſeconda, e terza del numero 2, s' avranno perciò i detti numeri applicati a' termini ſecondo, terzo, e quarto, e moltiplicati per li coefficienti degli ſteſſi termini, daranno i prodotti, che ſi devono mettere in vece de' coefficienti, che prima vi erano: Sicchè ſarà $\overline{a+2b}^3$

$=a^3$

$= a^3 + 6a^2 b + 12ab^2 + 8b^3$. Per la ſteſſa ragione, e in vigore della ſteſſa regola ſarà $\overline{2ac+b}^4 = 16a^4 c^4 + 32a^3 c^3 b + 24a^2 c^2 b^2 + 8acb^3 + b^4$.

Formola, o Canone generale per elevare un binomio, o qualunque Polinomio a qualſivoglia poteſtà.

CIII. I premeſſi Lemmi contengono la formola generale, la quale ſi avrà, ove i termini trovati per il Lemma I., e i coefficienti trovati per il Lemma II. ſi eſprimano indeterminatamente nel binomio, per eſ. indeterminato $p+q$, da elevarſi a qualunque poteſtà m. Perochè le due progreſſioni geometriche del Lemma I, ſaranno

p^m, p^{m-1}, p^{m-2}, p^{m-3}, p^{m-4}, p^{m-5} &c.
1, q, q^2, q^3, q^4, q^5 &c.

e li termini p^m, $p^{m-1}q$, $p^{m-2}q^2$, $p^{m-3}q^3$, $p^{m-4}q^4$, $p^{m-5}q^5$. formate poi le due ſerie del lemma II. per i coefficienti, le dette ſerie cambiate in frazioni, e queſte inſieme moltiplicate, s'avranno li coefficienti indeterminati, cioè per il primo termine $\frac{m}{1}$, per il ſecondo $\frac{m \times m-1}{2}$, per il ter-

zo $\frac{m \times m - 1 \times m - 2}{2 \times 3}$ e così in avanti. Accoppiando adunque a que' termini questi coefficienti, ecco stabilita la formola in questo modo $p^m + mp^{m-1} q + \frac{m \times m - 1}{2} p^{m-2} q^2 + \frac{m \times m - 1 \times m - 2}{2 \times 3} p^{m-3} q^3 + \frac{m \times m - 1 \times m - 2 \times m - 3}{2 \times 3 \times 4} p^{m-4} q^4$, e così all' infinito.

PROBLEMA I.

Elevare coll' uso della formola esposta un Binomio a qualunque potestà.

CIV. La soluzion del problema altro non richiede, se non il determinare ciò, che nelle formola è indeterminato, con sostituire a' termini indeterminati li determinati; poichè determinandosi l'esponente m della formola secondo l'esponente della potestà cercata, ne siegue che quando l' esponente m, che nella formola va continuamente decrescendo, diventa $=0$, quel termine sarà l'ultimo della potestà, che si cerca.

ca. A cagion d'esempio volendosi la potestà terza di $a+b$, già m è eguale a 3; Ma nel quarto termine della formola si trova l'esponente $m = 3$, e in conseguenza $3-3 = o$, Dunque il quarto termine è l'ultimo della formola, e degli altri non se ne ha conto. Imperochè sostituiti alle indeterminate p, q, m della formola i loro valori, cioè a, b, 3; s'avrà $p^m = a^3$; $mp^{m-1}q = 3a^2 b$; $\frac{m \times m-1}{2}$

$$p^{m-2}q^2 \left(= \frac{3 \times 3-1}{2} a^{3-2} q^2 \right) = 3ab^2; \frac{m \times m-1 \times m-2}{2 \times 3}$$

$$p^{m-3} q^3 \left(= \frac{3 \times 3-1 \times 3-2}{6} \text{ cioè } = \frac{6}{6} a^{3-3} \right) = ob^3.$$

Adunque $\overline{a+b}^3 = a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3$. Nell'istesso modo coll'uso della formola si eleva alla potestà terza il binomio $2ac + bb$, sostituendo alla p la quantità $2ac$, e alla q la bb, similmente alla m l'esponente 3; e s'avrà $p^m = 8a^3 c^3$; $mp^{m-1}q = 12a^2 c^2 b^2$; $\frac{m \times m-1}{2}$

$$p^{m-2}q = bacb^4, \frac{m \times m-1 \times m-2}{2 \times 3} p^{m-3} q^3 = b^6;$$

Laon-

Laonde il cubo del dato binomio è $8a^3c^3 + 12a^2c^2b^2 + 6acb^4 + b^6$.

PROBLEMA II.

Adoperare la formola per elevare a qualunque potestà qualsivoglia Polinomio.

CV. Ciò, che abbiam detto finora del binomio, si deve applicare a qualunque altro polinomio, soltanto che si consideri come binomio. Per es. si voglia elevato alla terza potestà il trinomio $a+b+c$. Si uniscano i due o ultimi, o primi termini, e si considerino racchiusi in una parentesi () come un solo. Sicchè sia $p = a$, $q = (b+c)$. Sarà dunque $p^m = a^3$; $mp^{m-1}q = 3a^2(b+c)$; $\frac{m \times m-1}{2}$

$p^{m-2}q^2 = 3a(\overline{b+c}^2)$ $\frac{m \times m-1 \times m-2}{2 \times 3}$ $p^{m-3}q^3 =$

$(\overline{b+c}^3)$. Dipoi coll'uso dell'istessa formola si

trovino i valori di $(\overline{b+c}^2)$, e di $(\overline{b+c}^3)$ e sarà il primo $= b^2 + 2bc + c^2$, il secondo $= b^3 + 3b^2c + 3bc^2 + c^3$, e unendoli ordinatamente a' termini già trovati s'avrà il cubo del trinomio dato, cioè $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

 $+3a^2$

$+3a^2c+6abc+3b^2c+3ac^2+3bc^2+c^3$. Nè altrimente si farà, quando sieno quattro, o più le parti del polinomio; cioè si prendano tre termini, o i primi o gli ultimi, considerati come un solo; e trovati poi li valori delle potestà di essi termini racchiusi nella parentesi successivamente, questi si sostituiscano di mano in mano, e si aggiungano all'altra parte del binomio. Notisi quì, che quando le potestà cercate fossero di più alto grado della cubica, il che rare volte succede, basterà accennare l'operazione, come si è detto (n. 96.), col soprapporre al Polinomio la lineetta coll'esponente della potestà cercata, per es. $\overline{ab+c}^4$, significa la potestà quarta, o quadrato-quadrata di $ab+c$, e $\overline{a+bx}^6$ significa la potestà sesta di $a+bx$ &c.

CVI. Lo stesso s'intenda delle frazioni da elevarsi a qualunque potestà; a ciò basta l'inalzare alla potestà cercata ambedue i termini della frazione. Così il quadrato di $\frac{ab}{c}$ è $\frac{a^2b^2}{c^2}$ e 'l cubo è $\frac{a^3b^3}{c^3}$. Della frazion composta

ſta $\frac{ab+ae}{c+d}$ il quadrato è $(a^2b^2+2a^2bc+a^2c^2)$ $\div(c^2+2cd+d^2)$, in cui la quantità poſta prima del ſegno di diviſione è il numeratore, l'altra poſta dopo è il denominatore; e il cubo della medeſima è $(a^3b^3+3a^3b^2c+3a^3bc^2+3a^3c^3)\div(c^3+3c^2d+3cd^2+d^3)$. Similmente ſe v' ha una frazion miſta, come $a+\frac{bc}{d}$, il ſuo quadrato ſarà $a^2+\frac{2abc}{d}+\frac{b^2c^2}{d}$ &c.

PROBLEMA III.

Transformare la predetta formola in quella, che il Nevvton propone.

CVII. Aſſai più ſpedita per l'eſtrazione ſpecialmente delle radici, di cui tratteremo nel capo ſeguente, è la formola Nevvtoniana, nella quale ſi deve ora transformare quella, di cui ſinora abbiam parlato. Sia data la radice binomia $a+b$. Si ponga $a=P$, e $\frac{b}{a}=Q$: ſarà $a+b=P+PQ$: On-

de $a^m = P^m$, $\frac{b^2}{a^2} = Q^2$, $\frac{b^3}{a^3} = Q^3$ &c. Si sostituiscano questi valori a' termini della superiore formola (n. 103.) cioè a' termini $p^n + mp^{m-1} q$ &c., e s' avrà la formola $P^n + \frac{m}{1} \times P^n Q + \frac{m}{1} \times \frac{m-1}{2} \times P^n Q^2 + \frac{m}{1} \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m-2}{3} \times P^n Q^3 + \frac{m}{1} \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m-2}{3} \times \frac{m-3}{4} \times P^n Q^4$ &c. Si ponga di nuovo $P^n = A$, sarà $\frac{m}{1} P^n Q = \frac{m}{1} A Q$. Sia $\frac{m}{1} P^m Q = B$, sarà $\frac{m}{1} \times \frac{m-1}{2} P^n Q^2 = \frac{m-1}{2} BQ$. Sia $\frac{m-1}{2} BQ = C$, sarà $\frac{m}{1} \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m-2}{3} P^n Q^3 = \frac{m-2}{3} CQ$. Sia $\frac{m-2}{3} CQ = D$, sarà $\frac{m}{1} \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m-2}{3} \times \frac{m-3}{4} P^m Q^4 = DQ$ &c. all'infinito. Si ha dunque la formola generale del binomio $a+b$ a qualunque indeterminata potestà elevato in questa maniera, $\overline{P+PQ}^m = P^m + \frac{m}{1} AQ + \frac{m-1}{2} BQ + \frac{m-2}{3} CQ + \frac{m-3}{4} DQ$ &c.

A cagion d'esempio si voglia la potestà quarta del numro 18, o della radice binomia di 10 + 8. Si sostituiscano alle lettere nella formola i valori determinati: sarà $m = 4$, $P = 10$, $Q = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$. Sicchè $P^m = 10^4 =$

10000

$10000 = A$, $mAQ = 4 \times 10000 \times \frac{4}{5} = \frac{160000}{5}$
$= 32000 = B$; $\frac{m-1}{2} BQ = \frac{3}{2} \times 32000 \times \frac{4}{5} =$
$38400 = C$; $\frac{m-2}{3} CQ = \frac{2}{3} \times 38400 \times \frac{4}{5} = 20480$
$= D$; $\frac{m-3}{4} DQ = \frac{1}{4} \times 20480 \times \frac{4}{5} = 4096 = E$;
$\frac{m-4}{5} EQ = 0$.

Adunque $10000 = A$
$32000 = B$
$38400 = C$
$20480 = D$
$4096 = E$

104976

E val quanto dire, che $\overline{10 + 8}^4$ cioè la potestà quarta del detto binomio è la somma 104976.

CAPO II.

L' Estrazione delle radici.

CVIII. OPposta per diametro alla formazion delle Potestà è l'estrazione delle Radici, perchè siccome quella involge, dirò così, una data quantità, e per via di moltiplicazione l'inalza a più alto grado, così que-

ſta la riſolve, e con la diviſione la reſtituiſce al ſuo grado. Laonde il buon' ordine richiede, che alla formazion delle poteſtà ſpiegata nel capo precedente ſucceda in queſto l' eſtrazion delle radici, prima dalle quantità numeriche, indi dalle letterali.

CIX. E per le quantità numeriche prima d' ogni altra coſa giova premettere la tavoletta de' numeri ſemplici, cui come a loro radici corriſpondono i quadrati, e i cubi, non ſolendoſi adoperare per i numeri altre ulteriori poteſtà.

Rad.	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10
Quad.	1,	4,	9,	16,	25,	36,	49,	64,	81,	100
Cubi	1,	8,	27,	64,	125,	216,	343,	512,	729,	1000

Ov' è da oſſervarſi 1.° , che ogni numero quadrato, che coſta d' una ſola, o di due note, ha la radice di una ſola nota; di fatti il quadrato anche della maſſima nota tra le ſemplici, cioè di 9 è 81. Così quel quadrato, che coſta di tre ò quattro note, ha la radice di due; di fatto il primo de' quadrati de' numeri compoſti, cioè di 10 è 100; e così il quadrato, che comprende cinque o ſei note, ha la radice di tre; il ſimile ſi dica degli altri. 2° . Che anche nel quadrato numerico ſi aſcondono le ſteſſe parti, che ſi appaleſano nel quadra-

drato del binomio letterale $a+b$, cioè i quadrati delle parti, e 'l doppio prodotto delle parti stesse insieme moltiplicate; e a farlo ocularmente vedere, mi servo del num.° 36. da inalzarsi alla potestà seconda, o quadratica. E' noto, che moltiplicandosi per se stesso, il prodotto 1296 è il suo quadrato. Or che questo quadrato contenga i quadrati delle parti 3, e 6, che sono 9, e 36, e dippiù il doppio prodotto di 3×6, cioè due volte 18, è chiaro per la stessa moltiplicazione, per cui prima si ha il quadrato di 6, poi il doppio prodotto di 3 in 6, e poi il quadrato di 3; il che meglio apparirà, se ciascun prodotto si scriva separatamente, e l'un sotto l'altro, ma in modo, che le monadi, le decine, le centinaja &c. sieno poste al suo luogo, come si vede fatto nell'apposto Esempio. Presupposte queste cose, sia il

```
   36
   36
  ---
   36
  18
  18
  9
 ----
 1296
```

PROBLEMA III.

Estrarre le radici quadrate dalle quantità numeriche.

CX. SE il dato quadrato è di quelli notati nella tavoletta nella serie de' qua-

drati, la ſua radice è il numero ſovrappoſto nella ſerie delle radici; Così la radice di 49. e 7, la radice di 81 è 9 &c.; e dove il numero dato non foſſe quadrato perfetto, ſi cerchi nella detta tavoletta il quadrato perfetto proſſimamente minore, per eſ. non trovandoſi tra i quadrati il numero 66, di cui ſi vuol la radice, ſi prenda il proſſimamente minore 64, la cui radice è 8, e ſi potrà continuare l'eſtrazione nel reſiduo 2, riducendolo a decimali, ſecondo che ſi dirà in appreſſo.

CXI. Se poi il dato numero, da cui ſi voglia eſtratta la radice, ſia un numero compoſto, cioè che coſti di molte note, ſi diſtribuiſca in membri, ciaſcuno di due note, cominciando dalle ultime, cioè da deſtra, poco importando, che reſti per ultimo membro una ſola nota, che ſarebbe la prima a ſiniſtra, come ſuccede quante volte il numero delle note non è pari. La diſtribuzione ſi può fare o per mezzo di punti come nell' Eſ. I., o per mezzo di lineette come nell'Eſ. II. tramezzate a ciaſcuna coppia di note. Indi ſi eſtragga dall'ultimo membro, che è il primo a ſiniſtra, la ſua radice, e ſe quello non è quadrato perfetto, dal proſſimamente minore, come nell' Eſ. I. (diſtribuito il dato nume-

numero 99856 in tre membri con puntarli, 9. 98. 56) la radice quadrata di 9 è 3; e nell' Es. II., essendo il primo membro 11. non perfetto quadrato, si estrae anche la radice 3 dal quadrato prossimamente minore 9. La radice 3 del primo Es. posta dietro la lunetta, come un quotiente, si moltiplichi per se stessa, e 'l suo quadrato 9 si sottragga dalla prima nota, o dal primo membro 9, e perchè niente resta, si cerchi, quante volte il doppio della radice trovata, cioè 6 doppio di 3, si contenga nella prima nota del secondo membro, non avendosi conto dell'altra, cioè nel 9 del secondo membro 98. Si trova contenersi una volta; e scrivasi 1 nel luogo de' quotienti dopo il 3. Se poi come nell' Es. II. sottratto il quadrato di 3, cioè 9 dal primo membro 11, vi è il resto 2, a questo si aggiunga l'altro membro 90, e cercandosi quante volte il doppio della radice 3, cioè 6 si contiene nel 29 (nulla curando dell' altra nota, ch' è zero) si trova 4 da mettersi dopo il 3 nella radice. L'operazione si prosegua, cioè (ripigliando l' Es. I.) per la radice novellamente scritta, cioè per 1 si moltiplichi il numero composto del doppio della radice prima trovata, e della radice nuova,

cioè

cioè 1×61, il prodotto 61 ſi ſottragga dal ſecondo membro 98, al reſto 37 ſi uniſcano le rimanenti note 56, e ſi faccia la ſteſſa operazione di prima, cioè non avendoſi conto dell' ultima nota 6, ſi cerchi quante volte il doppio di 31, cioè della radice trovata, ch'è 62 ſi contiene nel 375 (il che ſi può ſcuoprire nelle iniziali note 6, e 37) e trovato, che ſi contiene ſei volte, ſi ſcriva nel quotiente il 6, e moltiplicato 6 per il numero 626, ch'è il compoſto del doppio della radice prima trovata, e della nuova, il prodotto 3756 ſottraggaſi dal numero ſovrappoſto; e perchè nulla vi rimane, perciò l' operazione è finita, e la radice quadrata del dato numeio 99856 è 316, la quale ſe ſi moltiplichi per ſe ſteſſa, darà di nuovo il dato quadrato.

Eſ. I.	Eſ. II.	
9.98.56 (316	11|90|27 (345 690 (2)	
9	9	——
——	——	94×4= 256
0 98	68) 290	
61	256	685×5=3425
——	——	
3756	6) —3427	
3756	3425	
0	—2	

CXII.

CXII. Ma restandovi dopo l'ultima sottrazione un residuo, come nell' Es. II. vi resta il 2, ciò è segno, che il dato numero non è perfetto quadrato; onde non si può avere la radice vera di esso nè per mezzo d'alcun numero intiero, com' è evidente, nè per alcun rotto, o misto d' intiero e di rotto, che moltiplicato per se stesso dia il dato numero; perchè, come si è detto nel calcolo de' rotti, ogni frazione per se moltiplicata dà il prodotto minore di essa. In tal caso si aggiunge alla radice trovata una frazione, in cui il numeratore è l' ultimo residuo, il denominatore è il doppio della radice. Nell' es. II. i numeri posti a sinistra avanti le lunette sono i divisori, che di mano in mano si formano dal doppio della radice trovata; a destra poi sono i prodotti della radice novellamente trovata nel numero composto del doppio della radice prima trovata, e di essa medesima secondo la regola data. Ov' è da osservarsi, che tante sono le note radicali, quanti li membri, in cui per mezzo de' punti è diviso il dato numero.

CXIII. Già si vede; che l' estrazion della radice è similissima alla divisione, mentre in essa la radice è il quotiente, e 'l doppio della radice trovata è il divisore: Onde tutto

il

il divario tra l'una e l'altra è, che nella divisione il divisore sempre è lo stesso, quì sempre si aumenta a misura che si trovano le nuove note radicali, il doppio delle quali forma successivamente il nuovo divisore, di cui fino a che non sia trovata, è ignota la nuova figura, che gli si deve aggiungere; e ciò è il perchè quì non si ha conto dell'ultima nota della quantità da dividersi. Dippiù siccome a proseguire la divisione, quando il quotiente non è esattamente un numero intiero, si aggiungono all'ultimo residuo alquanti zeri, e così il quotiente diventa un misto d'intieri, e di rotti decimali; non altrimenti si può proseguire l'estrazion della radice, quando non è esatta, cioè della radice d'un numero non perfettamente quadrato, coll'aggiungere all'ultimo residuo de' zeri, per cui l'estrazion si faccia in frazioni decimali. E questo è ciò che chiamasi Approssimazion di radice; perochè sebbene d'un numero non quadrato la vera radice sia impossibile, e non possa esprimersi per numeri, può nondimeno per via di frazioni decimali sempre più avvicinarsi alla vera, sicchè il difetto, e la differenza dalla vera sia, minore d'ogni assignabile. Eccone la pratica.

PRO-

PROBLEMA IV.

D'un numero non quadrato cercar la radice per approssimazione.

CXIV. Qualora la radice trovata non è la vera, per approssimarla alla vera, si prosiegue l'estrazione in numeri decimali, con aggiungere, dopo l'ultima sottrazione de' numeri intieri, al residuo due zeri, e replicando questa giunta tante volte, quante nella radice si vogliono le decimali; avvertendosi, che ove la radice si è estratta fino alla metà, o più oltre di ciò, che si è prefisso, le ulteriori note si possono avere per mez-

```
    3|29|68(181 . 59 &c.
    1
    ---
    229
    224
    ----
      568
      361
      -----
362)  207.00
       1810
      ------
      18890.00
```

zo della sola divisione. L' esempio annesso, e posto distesamente farà chiaro il tutto. Si voglia dal numero non quadrato 32968 cavarsi la radice prossimamente vera, ed estendersi l'estrazione sino a cinque figure. Diviso il numero in membri, ed estratta dal primo la radice 1, e dal medesimo sottratto il quadrato 1 × 1, cioè 1, resta 2; quindi calando l'altro membro, si trova, che il doppio di 1, cioè 2 entra nel 22 più di diece volte, ma non può nel quotiente (secondo le leggi della divisione) mettersi più di 9; quì però nè anche può mettersi il 9, perchè il prodotto di 9 in 29, cioè 261 è più di 229, donde dovrebbe sottrarsi; perilche posto nel quotiente 8, e sottratto 8×28 = 224, resterà 5, a questo residuo aggiunte le rimanenti note 68, si troverà, che il doppio di 18, cioè 36 si contiene nel 56 una volta; onde posto nel quotiente 1, e tolto da 568 il prodotto 361, cioè 1 × 361, resterà 207, ch' è l' ultimo residuo. E poichè già si hanno tre note radicali, cioè più della metà di quelle, che si vogliono estrarre, le altre in decimali si avranno per mezzo della sola divisione, cioè dividendo 207.00 per 362, cioè per il doppio della radice 181.

CXV.

CXV. Coll' iſteſſo metodo si eſtraggono le radici da numeri decimali, o da miſti d'intieri, e di decimali. Così di 329.76 la radice è 18.159; e di 0.032976 la radice è 0.18159 &c.

Nè con altre regole dalle sinora eſpoſte si eſtraggono le radici dalle frazioni volgari. Imperochè o i termini delle medesime ſono ambedue quadrati, e di ciaſcheduno ſeparatamente si mette la radice. Così di $\frac{4}{25}$ la radice è $\frac{2}{5}$; ovvero non eſſendo i termini quadrati, ſi poſſono a quadrati prima ridurre, con dividerli, o moltiplicarli per l'iſteſſo numero (perchè in tal caſo non si cambia il valor della frazione) e quindi ſe n' eſtrae la radice; Come $\frac{12}{27} \div 3 = \frac{4}{9}$, e la ſua radice è $\frac{2}{3}$, e $\sqrt{\frac{2}{8}} \times 2 = \frac{4}{16}$ è $\frac{2}{4}$. Se finalmente i termini della frazione nè ſono quadrati, nè si poſſono ridurre a quadrati, dopo d'averne eſtratta la radice, che si può, coll' aggiungere a' loro residui de' zeri in egual numeao, si prosiegue l'eſtrazione in decimali.

CXVI. Affinchè però la detta approſſimazione di radici meglio per i ſuoi principj s'intenda, ne ſpiego anche la teoria, che tutta in que-

questa proposizione si fonda. Se di due numeri, che tra se differiscono per unità, come x, e $x+1$, si facciano i quadrati, il minore mancherà dal maggiore pel doppio della sua radice, più l'unità. E' chiaro col solo farsi li quadrati delle date quantità, che sono x^2, e x^2+2x+1. D'onde s'inferisce, che se estratta la radice da un dato numero vi è il residuo, il valor di questo è minore del doppio della radice trovata, più l'unità; perchè se fosse eguale al doppio della radice, più l'unità, già la radice si accrescerebbe d'una unità, e non avrebbe conseguentemente residuo. Estratta per es. dal numero 45 la radice quadrata, questa sarà 6 col residuo 9, il valor di cui è meno di $\overline{2\times6}+1=13$, poichè il quadrato 36 più 13 fa 49, la di cui radice 7 supera la radice trovata 6. d'una unità. Ciò che rimane adunque, estratta la radice, deve necessariamente valer meno dell'unità della radice medesima.

Or tai cose presupposte, se si voglia da un numero non quadrato, come da 67 estrarre la radice per approssimazione, è chiaro per la regola di sopra esposta, che estratta la radice 8, e tolto da 67 il prodotto di 8 in 8,

ciòè

ne a un caso particolare dell' equazione $x^3 - 6x^2 + 13x - 10 = 0$, alla cui radice si voglia aggiunta la quantità 3. Sarà pertanto $p = -6$, $q = 13$, $r = -10$, ed $a = 3$, e sostituiti questi valori s'avrà

$$\begin{array}{llll} y^3 \,(-9 & (+27 & (-27 & \\ & (-6\,y^2 & (+36 & (-54 = 0 \\ & & (+13 & (-39 \\ & & & (-10, \end{array}$$

vale a dire $y^3 - 15y^2 + 76y - 130 = 0$, nella quale ad x si è fatta $= y - 3$.

Che se la radice della stessa equazione si voglia la radice diminuita del numero 3, l'operazione similmente fatta sarà come una pruova della precedente, e in essa s'avrà $p = 15$, $q = 76$, $r = -130$, e facendosi consequentemente $y = x + 3$, sostituendone i valori, s'avrà

$$\begin{array}{llll} x^3 \,(+9 & (+27 & +27 & \\ (-15x & (-9 & -135 & \\ & (+76x & +228 & \\ & & -130 = 0, & \end{array}$$

com'è manifesto.

Sia quest' altra equazione $y^4 + 4y^3 - 19y^2 - 106y - 120 = 0$, e si vogliano le sue radici aumentate anche del numero 3. Si ponga $y = x - 3$, ed elevato questo binomio alle stesse potestà in cui in tutti i termini si trova elevata la y, si avrà

$$y^4 = x^4 - 12x^3 + 54x^2 - 108x + 81$$

$$4y^3 = 4x^3 - 36x^2 + 108x - 108$$
$$-19y^2 = -19x^2 + 114x - 171$$
$$-106y = -106x + 318$$
$$-120 = -120$$

vale a dire $x^4 - 8x^3 - xx + 8x = 0$, le cui radici ſuperano, come ſi chiedeva, del numero 3 le radici della propoſta; mentre queſte ſono $+5$, -2, -3, -4, e quelle della trasformata ſono $+8$, $+1$, $+0$, -1, le quali, come ſi vede, ſuperano le prime di 3. Che ſe queſte ſi vogliano diminuite del numero 3, ſi faccia $y = x + 3$, e s'avrà

$$y^4 = x^4 + 12x^3 + 54x^2 + 108x + 81$$
$$4y^3 = 4x^3 + 36x^2 + 108x + 108$$
$$-19y^2 = -19x^2 - 114x - 171$$
$$-106y = -106x - 318$$
$$-120 = -120;$$

cioè $x^4 + 16x^3 + 71x^2 - 4x - 420 = 0$, le cui radici 2, -5, -6, -7 ſono minori delle radici della propoſta del numero 3.

LXXIII. Quindi ſi ricava in in 1. luogo, ſervire all'addizione il ſegno $-$, alla ſottrazione il ſegno $+$, e ciò perchè ſe $x = a$, ſarà $x - a = 0$. Si ricava in ſecondo luogo, che nell'accreſcere le radici dell'equazione, mai non accaderà, che le radici poſitive divenino negative, ma piuttoſto le negative poſſono

no farsi positive, come sarebbe, se v. g. x fosse $= -3$, e la radice dell' equazione s' accrescesse di 5, cioè si facesse $x = y - 5$; onde $y = -3 + 5 = 2$; la radice dunque delle nuova equazione sarebbe 2, cioè positiva, laddove prima era -3, negativa; e generalmente la radice negativa diventa positiva, quando la radice dell' equazione si accresce d' una quantità, che sia della massima quantità falsa maggiore. Per l' opposito se $x = 3$, e si voglia diminuita questa radice del numero 5; con farsi $x = y + 5$, ne viene, che $y = x - 5 = 3 - 5 = -2$; onde la radice della nuova equazione è -2, cioè negativa, e prima era positiva, e ciò accade sempre che la radice si diminuisca d' una quantità, che sia maggiore della massima radice vera. Perilchè sarà sempre meglio l' accrescere, che il diminuire la radice dell' equazione, quando egualmente l' uno e l' altro si può fare. Si ricava in 3. luogo, che nell' accrescere per addizione le radici, si accrescono di quella tale quantità le positive, e della stessa quantità si diminuiscono le negative, perchè il positivo aggiunto al negativo, questo si fa minore nel genere suo, se era maggiore del positivo; diventa zero, se l' era eguale; e se era minore, diventa posi-

tivo. All' opposto nel diminuirsi d' una data quantità le radici, le negative crescono nel genere loro di quella data quantità, ma le positive diventano nulle, se sieno loro eguali, e negative, se sieno di esse minori.

LXXIV. In quanto al secondo modo di accrescere o diminuire proposto nel problema, cioè per moltiplicazione, o per divisione, la radice dell' equazione: Ciò si otterrà, se sotto la data equazione istituiscasi una serie geometrica, che abbia per primo termine l' unità, cioè 1, per secondo il denominatore della ragione, cioè quello, per cui moltiplicare, o divider si debba la radice dell' equazione, per es. a, quindi per terzo, per quarto &c. le potenze dell' istesso a ordinatamente crescenti sino a che il numero di questi termini agguagli quello della proposta. I termini di questa si moltiplichino, o si dividano per i termini omologi della serie, con sostituire alla data incognita un' altra qualunque, cioè ad x data la y nella sequente forma

Sia la data equazione $x^3 + px^2 + qx + r = 0$

Serie geometrica $1, a, a^2, a^3$

fatta $y = xa$, sarà $y^3 + apy^2 + a^2 qy + a^3 r = 0$

fatta $y = \frac{x}{a}$ sarà $y^3 + \frac{py^2}{a} + \frac{qy}{a^2} + \frac{r}{a^3} = 0$. Se nell'

equa-

equazione manca qualche termine, il coefficiente di esso sarà o, e nel resto si proceda, come se tal termine non vi mancasse. Lo stesso aumento, e la stessa diminuzione, sia nel primo, sia nel secondo degli esposti modi, si avrà, se mancando nell' equazione qualche termine, si cancellino nelle formole già dichiarate li termini, ne' quali si trova la p, se manca il secondo termine, o la q, se manca il terzo termine.

Problema II. Toglier via qualche termine d'una data equazione; e per l'opposto render compita quella, in cui alcun termine manchi.

LXXV. Questo Problema è l'uso principale delle sostituzioni spiegate nel precedente. La risoluzione della I. parte comprende varie regole, secondo che diversi sono i termini, che si vogliono levare. I. se si vuol tolto il secondo termine, si faccia l'incognita dell' equazione eguale per il problema precedente ad un'altra, aggiuntole, se il secondo termine ha il segno negativo, e sottrattone, se quello ha il segno positivo, il coefficiente dello stesso secondo termine, diviso per il grado dell' equazione data. Per esemplificare, comincio da un equazione di secondo grado: Sia

$xx + ax - bb = 0$. Pongasi $x = y - \frac{a}{2}$, indi fatte le sostituzioni sarà

$$\begin{aligned} xx &= yy - ay + \frac{aa}{4} \\ +ax &= \quad +ay - \frac{aa}{2} \\ -bb &= \quad -bb, \end{aligned}$$

cioè $yy * - \frac{aa}{4} - bb = 0$, in cui il secondo termine manca: onde essendo $yy = \frac{aa}{4} + bb$, se dal valore di y sottraggasi $\frac{1}{2}a$, il residuo sarà il valore di x. Dal che s'inferisce in primo luogo, che in questa maniera ogni equazione quadratica affetta più speditamente si risolve, che nell'altra maniera, quale al n. 34. si espose. S'inferisce in secondo luogo, che ogni equazione deficiente del secondo termine ha radici positive, e negative, e la somma delle positive è eguale alla somma delle negative (n. 63.) altrimenti non potrebbero scambievolmente distruggersi, nè potrebbe annullarsi il secondo termine. S'inferisce finalmente, che se l'equazione fosse di terzo grado, l'incognita x dovrebbe farsi eguale ad

y —

$y - \frac{a}{3}$, se di quarto grado, dovrebbe farsi $x = y - \frac{a}{4}$. Ed acciò, che questa regola meglio s'intenda, si sostituisca all'incognita x la $y + m$ (si pone indeterminata la m, perchè nel progresso deve determinarsi). Sia dunque la data equazione di terzo grado $x^3 + ax^2 + abx + abc = 0$, in cui a, b, c possono essere positive, o negative. Per la sostituzione avrassi

$$\begin{aligned} x^3 &= y^3 + 3my^2 + 3m^2 y + m^3 \\ + ax^2 &= \quad + ay^2 + 2may + m^2 a \\ + abx &= \quad\quad + aby + mab \\ + abc &= \quad\quad\quad + abc \end{aligned} \quad = 0$$

Acciocchè nell'equazione trasformata manchi il secondo termine, bisogna, che sia $3m + a = 0$, cioè $m = -\frac{a}{3}$ secondo la regola. Di fatto se si ponga $x = y - \frac{a}{3}$, si avrà l'equazione trasformata $y^3 * - \frac{a^2}{3} \times y + \frac{2a^3}{27}$

$$+ aby - \frac{aab}{3}$$

$$+ abc$$, nella

la quale manca il secondo termine. Sia ora l'equazione di quarto grado $x^4 + ax^3 + abx^2 + abcx + abcd = 0$, e fattasi $x = y + m$, s'avrà

$$\begin{aligned}
x^4 &= y^4 + 4my^3 + 6m^2y^2 + 4m^3y + m^4 \\
+ax^3 &= \quad + ay^3 + 3amy^2 + 3am^2y + am^3 \\
+abx^2 &= \qquad\quad + aby^2 + 2abmy + abm^2 = 0 \\
+abcx &= \qquad\qquad\quad + abcy + abcm \\
+abcd &= \qquad\qquad\qquad\quad + abcd.
\end{aligned}$$

Acciò, che sia nullo il secondo termine, vopo è che $4m + a = 0$, cioè $m = -\frac{a}{4}$; onde surrogando nel secondo termine ad m la quantità $-\frac{a}{4}$, esso diviene $-ay^3 + ay^3$ consequentemente $= 0$.

LXXVI. In somigliante maniera all'esposta si procede, volendosi tolto il terzo termine. Si ripigli l'esempio dell'equazione di terzo grado, e volendosi in essa tolto il terzo termine, bisogna, che sia $3m^2 + 2ma + ab = 0$. A determinare adunque la m, si deve risolvere la detta equazione, ch'è di secondo

gra-

grado, la quale avendo perciò due radici, darà un doppio valore di m, per cui conseguentemente sparisce il terzo termine; seppure il doppio valore non sia, come suole accadere, l'uno, e l'altro immaginario, e in tal caso non può togliersi il terzo termine. Nell'esempio dell'equazione di quarto grado si torrà il terzo termine, se si faccia $6m^2 + 3am + ab = 0$, dalla cui risoluzione viene un doppio valore di m, e qualora sarà l'uno e l'altro immaginario, non occorre levare l'anzidetto terzo termine, per non riempire l'equazione di quantità immaginarie. Così anche si torrà il quarto termine, risoluta che sia l'equazione

di terzo grado $4m^3 + am^2 + 2abm + abc = 0$, la quale avendo sempre un solo almeno valore reale, di questo si potrà far uso con evitare gl'immaginarj.

E poichè nella sez. precedente si è data la maniera di risolvere l'equazioni di secondo grado, metto un'altro esempio, in cui il terzo termine da levarsi nell'equazione trasformata sia un'equazione di secondo grado, come l'è per altro anche nell'esempio addotto, in cui non si è stesa la risoluzione per non confondere con altre operazioni quella, che

era

era lo ſcopo del problema. Sia pertanto l'e-
quazione $y^4 - 3ay^3 + 3a^2y^2 - 5a^3y - 2a^4 =$
o. Si ponga $y = x - n$ (la n deve in progreſ-
ſo determinarſi) fatte le ſoſtituzioni , avraſſi

$$\begin{aligned} x^4 - 4nx^3 + 6nnxx - 4n^3x + n^4 \\ - 3ax^3 + 9anxx - 9annx + 3an^3 \\ + 3aaxx - 6aanx + 3aann \\ - 5a^3x + 5a^3n \\ - 2a^4 \end{aligned}$$

Ad an-
nullare il terzo termine, biſogna, che ſia $6nn$
$+ 9an + 3aa = 0$, e però $nn + \frac{3an}{2} + \frac{aa}{2} =$
0; conſequentemente $n = -\frac{3a}{4} \pm \frac{a}{4}$. Dal che
s'inferiſce, che $x - n$ equivale ad $x + \frac{a}{2}$, ov-
vero ad $x + a$; mentre o l'una o l'altra di
queſte ſoſtituzioni vale a togliere il terzo ter-
mine, dandoci la prima $x^4 - ax * - \frac{15a^3x}{4} -$

$65a^4$

$\frac{65a^4}{16} = 0$, e la seconda $x^4 + ax * - 4a^3 x - 6a^4 = 0$.

LXXVII. Affin di togliere il quarto termine si dà da alcuni questo altro metodo facilissimo. Tolto che sia il secondo termine (n. 75.) basta sostituire in luogo dell' incognita della data equazione o la cognita dell' ultimo termine, o qualunqe altra costante divisa per la nuova incognita. Sia a cagion d' esempio l' equazione, in cui si supponga tolto il secondo termine, e si voglia tolto anche il penultimo, $y^4 * aayy - a^3 y + a^4 = 0$. Si ponga $y = \frac{a^4}{x}$, ovvero $= \frac{aa}{x}$, s' àvrà, fatte le sostituzioni $\frac{a^8}{x^4} + \frac{a^6}{xx} - \frac{a^5}{x} + a^4 = 0$, e riducendo al comune denominatore, e dividendo per a^4, sarà $x^4 - ax^3 + aaxx * + a^4 = 0$, in cui già manca il quarto termine.

LXXVIII. L' ultimo termine non si può mai togliere, se non si sappiano già le radici della proposta equazione, perchè nella trasformata s' incontra per ordinario essere l'

ulti-

ultimo termine un' equazione di quel grado, di cui è la proposta, anzi l' istessa, che la proposta. Di fatto nel secondo, e terzo esempio del n. 75. per ultimo termine s' incontra

l' equazione $m^3 + am^2 + abm + abc = 0$, ch' è la

stessa della proposta cubica, e $m^4 + am^3 + abm^2 + abcm + abcd$ niente dissimile dalla proposta biquadratica.

LXXIX. Due cose sono quì da osservarsi: la prima, che in vigor della trasformazione dichiarata sinora, ogni equazione di terzo, e di quarto grado può cambiarsi in un' altra, che non abbia il secondo termine: il che serve moltissimo alla risoluzione delle equazioni di alto grado. La seconda è, che in siffatte trasformazioni il metodo delle sostituzioni fa sparire qualunque termine, ma non più che un solo la volta, perchè l' introduzione di una sola incognita può far sì, che s' adempisca una sola condizione; e però non può servire se non a risolvere una sola equazione. E questo basti aver detto intorno all' uso principale delle trasformazioni, ch' è di fare sparire un qualche termine d' una data equazione.

LXXX.

LXXX. Ma se maancando qualche termine, si voglia l'equazione completa (come richiede la seconda parte del proposto problema) ciò si otterrà facilmente coll'uso anche della sostituzione, cioè col farsi alla data incognita eguale un'altra +, o − una qualunque costante. Sia l'equazione $x^4 * + px^2 + qx + r = 0$, la quale, mancando del secondo termine, si voglia compita. Si faccia $x = y \pm a$;

sarà l'equazione trasformata $y^4 \pm 4ay^3 \pm \overline{6a^2}$

$\overline{- 3ap} \times y^2 \pm \overline{4a^3 + 3a^2 p - 2aq} \times y \pm a^4 - a^3 p + a^2 q \pm r = 0$. Se dippiù si volesse, che la trasformata fosse di grado superiore, basta il moltiplicare ciascun termine della proposta per quella potestà, per cui si vuole, che cresca il grado dell'incognita, e si faccia la solita sostituzione. Così se data l'equazione $x^4 - a^4 = 0$, si voglia cambiata in un'altra di sesto grado, questa sarebbe $x^6 - a^4 xx = 0$; quindi fatta $x = z \pm a$, secondo il metodo spiegato avrebbesi l'equazione.

LXXXI. L'altro uso, che si può fare dell'indicate sostituzioni, è, che non potendosi conoscere le radici d'una proposta equazione; ove col trasformarsi si abbiano le radi-

ci

ci della trasformata, queſte accreſciute o diminuite, moltiplicate o diviſe per la quantità coſtante, ſecondo la ſoſtituzione fatta, ſarebbero anche le radici della propoſta. Per eſ. ſia l'equazione $x^4 + 2bx^3 \begin{matrix} - 2abxx \\ + bbxx \end{matrix} - 2aabx - aabb = 0$; queſta, che non è riducibile per alcun diviſore dell'ultimo termine, ſe da eſſa ſi tolga il ſecondo termine, col fare $x = y - \frac{b}{2}$, ſi muterà in queſt'altra

$$\begin{matrix} y^4 \; * & -2aayy \; * & + \frac{b^4}{16} \\ & - bbyy & - \frac{aabb}{2} \end{matrix} = 0$$

ch'è quadratica affetta, le di cui radici diminuite della quantità $\frac{b}{2}$ (per eſſerſi ſoſtituita alla x la $y - \frac{b}{2}$) ſaranno le radici della propoſta.

LXXXII. Può ancora per mezzo della ſoſtituzione liberarſi l'equazione dalle frazioni e da' ſordi. In quanto alle frazioni, ſi faccia l'incognita della data equazione eguale ad un' altra diviſa per la minima quantità, che per ciaſcu-

ciascuno de' denominatori de' termini della proposta sia divisibile (quale quantità, ove i denominatori sieno primi tra loro, è il prodotto de' medesimi). Fatte dipoi le sostituzioni, e ridotti li termini al comune denominatore, avrassi l'equazione libera già dalle frazioni; e le radici di esse saranno quelle della proposta, moltiplicata per la quantità, per cui è stata divisa la nuova incognita. Sia per es. l'equazione $x^3 + \frac{axx}{6} - \frac{abx}{3} + aab = 0$. Si faccia $x = \frac{z}{6}$, sarà $xx = \frac{zz}{36}$, $x^3 = \frac{z^3}{216}$. Pertanto la trasformata sarà $\frac{z^3}{215} + \frac{azz}{216} - \frac{abz}{18} + aab = 0$, e riducendo al comune denominatore, si avrà $z^3 + azz - 12abz + 216aab = 0$, le cui radici moltiplicate per 6 sono le radici della proposta.

LXXXIII. In quanto ai sordi, sebbene non sempre, pur molte volte vale lo stesso metodo. Si faccia l'incognita dell'equazione eguale ad un' altra divisa per la data radicale, e si adopri la sostituzione. Sia per esempio $y^3 - yy\sqrt{3} + \frac{26y}{27} - \frac{26z}{27\sqrt{3}} = 0$. Si ponga $y = \frac{z}{\sqrt{3}}$,

sarà

sarà $yy = \frac{zz}{3}$, $y^3 = \frac{z^3}{3\sqrt{3}}$; quindi sostituendo sarà $\frac{z^3}{3\sqrt{3}} - \frac{zz\sqrt{3}}{3} + \frac{26z}{27\sqrt{3}} - \frac{8}{27\sqrt{3}} = 0$. Finalmente liberando dalle frazioni, con fare nel modo poch' anzi detto $z = \frac{x}{9}$, ovvero $= \frac{x}{3}$ (il che nel caso riesce meglio) avrassi $x^3 - 9xx + 26x - 24 = 0$. E poichè per la prima sostituzione si ha $y = \frac{z}{\sqrt{3}}$, e per la seconda si ha $z = \frac{x}{3}$, sarà $y = \frac{x}{3\sqrt{3}}$ &c.

CAPO IV.

Riduzione dell' Equazioni di alto grado per mezzo de' Fattori razionali.

LXXXIV. Liberate l'equazioni dalle frazioni, o dalle irrazionali, se ve ne sono, come si è detto ne' due numeri precedenti, e fatto il massimo termine positivo, e senza coefficiente numerico (n. 59.) prima di decidere, essere il problema di quel grado, di cui è l'equazione, bisogna vedere,

ſtrazione; ma veggo, che ſarà più facile l'operazione aſſunto per primo termine $8c^3$; poichè eſtratta da queſto la radice cubica $2c$, per il triplo del quadrato di eſſa, cioè per $12c^2$ divido tutt'i termini, in cui ſi trova c^2, e i quotienti $3d + 6a$ giunti alla prima parte $2c$ compieranno la radice eſatta $2c + 3d + 6a$.

PROBLEMA VI.

Adoperare la formola generale per l'eſtrazione di qualunque radice.

CXXX. Finora abbiam parlato dell'eſtrazione delle ſole radici quadrata, e cubica, che ſogliono più volentieri occorrere nel calcolo; ma può anche accadere, che ſi debba eſtrarre la radice da poteſtà di più alto grado, e più compoſta. Per tutti li caſi anche i più intrigati giova la formola generale eſpoſta nel capo precedente dal n. 102. ſino al 107. Eccone l'uſo. Si applichino i termini della data poteſtà, qualunque ella ſia, per eſ. d'un trinomio quadrato $a^2 + 2ab - 2ac + b^2 - 2bc + c^2$, ſi applichino, dico, à termini della formola (baſtando pigliarne i due primi, quando ſi tratta di radici razionali) che

ſono $p^m + mp^{m-1} q$. Sarà pertanto $a^2 = p$, $2ab - 2ac = q$. E poichè l'eſponente della radice quadrata (come ſi è detto nel num. 93.) è $\frac{1}{2}$ ſiccome per la cubica è $\frac{1}{3}$, per la quadrato-quadrata è $\frac{1}{4}$ &c., cercandoſi nel caſo preſente la radice quadrata, ſarà $m = \frac{1}{2}$. Sarà dunque il primo termine della radice, cioè $p^m = a^{2 \times \frac{1}{2}} = a^1$, $= a$, il ſecondo $mp^{m-1} q = \frac{1}{2} a^{1-1} q$

$= \frac{1}{2} a^{-1} \times \overline{2ab - 2ac}$; e val quanto dire $\frac{1}{2} a^{-1} \times 2ab$, $= a^{-1+1} b$, cioè $a^0 b = b$; e ſimilmente $\frac{1}{2} a^{-1} \times -2ac$, $= -a^{-1+1} c$, $= -a^0 c = -c$. E poichè m è già $= 0$, non ſi deve paſſar più innanzi, e perciò i due ultimi termini della radice eſſendo $a^0 b$, e $-a^0 c$, con iſvanire nell'una e nell'altra parte a, ſaranno b, e $-c$, e la radice intera ſarà $a + b - c$. Sia parimente da eſtraerſi la radice cubica da queſta poteſtà $a^3 - 3a^2 b + 3ab^2 - b^3$. Sarà $a^3 = p$, $-3a^2 b$ &c. $= q$, $m = \frac{1}{3}$. Dunque $p^m =$

$a^{3 \times \frac{1}{3}} = a$; $mp^{m-1} q = \frac{1}{3} a^{3 \times -\frac{2}{3}}$, $= \frac{1}{3} a^{-2} q$,

=

$= \frac{1}{3} a^{-2} \times -3a^2 b$, $= -a^{-2+2} b$, $= -a^0 b$, $= -b$. Dunque per eſſere già $m = 0$, la radice cercata è $a - b$. In ſimile maniera ſe ſi voglia la radice quadrato-quadrata di $a^4 - 4a^3 b + 6a^2 b^2 - 4ab^3 + b^4$, ſi faccia $a^4 = p$, $-4a^3 b + 6a^2 b^2$ &c. $= q$, $m = \frac{1}{4}$. Sarà $p^m = a^{4 \times \frac{1}{4}} = a$; $mp^{m-1} q = \frac{1}{4} a^{4 \times -\frac{3}{4}}$, cioè $\frac{1}{4} a^{-3} \times -4a^3 b = -a^{-3+3} b$, $= -a^0 b$, $= -b$. Dunque la richieſta radice è $a - b$.

CXXXI. Ove poi l'eſponente m non mai s'incontri eguale a zero, allora è ſegno, che la radice non è eſatta, ma è ſorda, e irrazionale; e comeche in tal caſo ſuole eſprimerſi col ſegno radicale √ (n. 124.), volendoſi però eſtrarre la radice, queſta può per approſſimazione averſi; cioè non potendoſi avere il vero valore, poſſiamo ſempre più accoſtarſi ad eſſo, e ciò anche per mezzo della formola, come nel ſeguente problema paſſo a dichiarare.

PROBLEMA VII.

Coll' uso della formola continuar l' estrazion della radice all' infinito.

CXXXII. SI prendano dalla formola generale tanti termini, per quanti l'estrazione si voglia continuata, e questi termini sieno segnati con le lettere A, B, C, D &c. Si voglia per es. estratta la radice quadrata, dalla quantità $a^2 - b^2$. Sarà $p = a^2$, $q = -b^2$, $m = \frac{1}{2}$. Adunque

$$A\ (p^m) = a^2 \times^{\frac{1}{2}} = a^1$$

$$B\ (mp^{m-1} q) = \frac{1}{2} a^{1-1} q, = \frac{1}{2} a^{-1} \times - b^2, = - \frac{b^2}{2a}$$

$$C\ \left(\frac{m \times m - 1}{2} p^{m-2} q^2\right) = \frac{1}{2} \times - \frac{1}{4}, = - \frac{1}{8} a^2 \times^{-\frac{3}{2}},$$

$$= - \frac{1}{8} a^{-3} q^2, = - \frac{b^4}{8a^3}.$$

$$D\ \left(\frac{m \times m - 1 \times m - 2}{2 \times 3} p^{m-3} q^3\right) = \frac{1}{2} \times - \frac{3}{4} \times - \frac{1}{2},$$

cioè $\frac{1}{16} a^2 \times^{-\frac{5}{2}} = \frac{1}{16} a^{-5} q^3, = - \frac{b^6}{16a^5}$; e così all' infinito: Onde la radice per i termini A, B, C, D &c. all'infinito continuata

sarà

sarà $a - \frac{b^2}{2a} - \frac{b^4}{8a^3} - \frac{b^6}{16a^5}$ &c.

CXXXIII. Si può in vece della predetta adoperare la formola del Nevvton, spiegata nel probl. III. del capo precedente (n. 106.), la quale è più spedita, e meno soggetta a frazioni, cioè $P^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n} AQ + \frac{m-n}{2n} BQ + \frac{m-2n}{3n} CQ + \frac{m-3n}{4n} DQ$ &c. In questa formola P significa il primo termine di quella potestà, di cui si cerca la radice; Q i rimanenti termini divisi per il primo, $\frac{m}{n}$ l' esponente della richiesta radice; le lettere A, B, C, D &c. esprimono i termini successivamente trovati in modo che A esprima il primo termine $= P^{\frac{m}{n}}$, B il secondo $= \frac{m}{n} AQ$, C il terzo $= \frac{m-n}{2n} BQ$, e così in avanti. Coll'esempio la cosa si renderà chiara.

Debba estrarsi la radice quadrata da $\overline{c^2 + z^2}$.

In tal caso $P = c^2$, $Q = \frac{z^2}{c^2}$, $m = 1$, $n = 2$.

Sicchè $A (= P^{\frac{m}{n}}) = c^2 \times \frac{1}{2} = c$.

$$B\left(=\frac{m}{n}AQ\right)=\frac{1}{2}c\times\frac{z^2}{c^2}=\frac{z^2}{2c}$$

$$C\left(=\frac{m-n}{2n}BQ\right)=\frac{\frac{1}{2}-2}{4}\times\frac{z^2}{2c}\times\frac{z^2}{c^2}=-\frac{z^4}{8c^3}$$

$$D\left(=\frac{m-2n}{3n}CQ\right)=\frac{\frac{1}{2}-4}{6}\left(\text{cioè }-\frac{1}{2}\right)\times-\frac{z^4}{8c^3}$$

$$\times\frac{z^2}{c^2}=\frac{z^6}{16c^5}\ \text{\&c.}$$

Adunque la richiesta radice continuata per i termini A, B, C, D &c. è $= c + \frac{z^2}{2c} - \frac{z^4}{8c^3} + \frac{z^6}{16c^5} - \frac{5z^8}{128c^7}$. &c. Ov' è da notarsi, che nel coefficiente $\frac{m-2n}{3n}=\frac{\frac{1}{2}-4}{6}$, e in altri simili, non è neceſſario, che si prenda il valore in tutto rigore, ma baſta per maggior comodo del calcolo, che si prenda a un di preſſo. Il valor vero della frazione $\frac{\frac{1}{2}-4}{6}$, sarebbe propriamente $-\frac{7}{12}$, non già $-\frac{1}{2}$, queſto però in una ſerie di termini decreſcenti all'

infi-

infinito non è sensibilmente differente da quello; all'incontro è assai più comodo, perchè altrimente in vece del quarto termine $\frac{z^6}{16c^5}$ dovrebbe mettersi $\frac{7z^6}{192c^5}$; il che nel trovare i susseguenti termini farebbe una difficultà grandissima, e una noja incredibile.

CAPO III.

Calcolo delle potestà, e delle radicali.

CXXXIV. Il sudetto calcolo non è diverso da quello degl'intieri, coerentemente però alla affezioni così dell'une, come delle altre. Perilche giova rammentare, che ove la progressione geometrica (come accade nella formazion delle potestà) comincia dall'unità, e similmente l'aritmetica dal zero, sicchè il zero sia l'esponente dell'unità, allora il doppio dell'esponente di qualunque termine della serie geometrica è eguale all'esponente del quadrato di esso termine, e 'l triplo è l'esponente del cubo dell'istesso, il quadruplo del biquadrato, e così in avanti; siccome la

metà del primo esponente fa l'esponente della radice quadrata, il terzo di quello fa l'esponente della radice cubica, il quarto della biquadrata del medesimo termine, e così all'infinito.

La ragione di ciò dipende dalla dottrina delle proporzioni, che sarà la materia della seconda parte; per intelligenza però di quello, che si dice, basta accennare soltanto, che nascendo il quadrato dalla moltiplicazione del lato per se stesso, ne viene, che l'unità, il lato, e 'l quadrato sono geometricamente proporzionali: onde la somma degli Esponenti dell' unità e del quadrato è eguale al doppio del lato, o della radice. Dunque dove l'esponente dell' unità è zero, il solo esponente del quadrato dev'essere il doppio dell' esponente della radice. Similmente nascendo il cubo dalla moltiplicazione del quadrato per la radice, ne viene, che l'unità, il lato (o la radice), il quadrato, e 'l cubo formano una progressione geometrica; perilche la somma degli esponenti dell' unità, e del cubo adeguano la somma degli esponenti del lato, e del quadrato; e in consequenza essendo l'esponente dell' unità il zero, e l'esponente del quadrato il doppio dell'esponente del lato, ne siegue, che l'esponente del cubo sia il triplo di quel-

quello del lato. Per l' isteſſa ragione, ma in ſenſo contrario la metà dell' eſponente d'una data quantità dà l' eſponente della radice quadrata della medeſima, la terza parte dell'eſponente di quella dà l' eſponente della radice cubica; e così dell' altre.

CXXXV. Or preſuppoſte tai coſe già è chiaro, che la ſomma delle poteſtà non deve alterare in nulla gli eſponenti, ma ſoltanto unire inſieme i coeſſicienti nelle poteſtà dell'isteſſa radice; e in quelle di diverſa radice mettere l'una dopo l'altra col ſegno +. Così la ſomma di a^2, e di $2a^2$ è $3a^2$, e de' binomii $5a^3 + 2bx^2$, e $2a^3 - 2bx^2$ la ſomma è $7a^3$. Similmente la ſomma delle poteſtà a^m, $a^{\frac{1}{n}}$ è $a^m + a^{\frac{1}{n}}$. L'isteſſo a proporzione s' intenda della ſottrazione. Onde dovendoſi ſottrarre $2a^2$ da $5a^2$, il reſiduo è $5a^2 - 2a^2 = 3a^2$; e 'l reſiduo di $6x^2$ da $5x^3$ è $5x^3 - 6x^2$.

CXXXVI. Circa la moltiplicazione, ſe i termini delle poteſtà ſono diſſimili, cioè di diverſa radice, ſi ſcrivano l'un dopo l'altro ſenza frapporvi ſegno, come ſi uſa nella moltiplicazione delle quantità ſemplici. Così $a^n \times b^{-n} = a^m b^{-n}$ Se poi ſono ſimili, cioè dell' isteſſa radice, ſi uniſcano inſieme gli eſponenti, e la ſomma di

di questi ascrivasi alla radice; come $a^3 \times a^2 = a^5$, e generalmente $x^m \times x^n = x^{m+n}$. La ragione di ciò è, perchè $a^3 = aaa$, & $a^2 = aa$; ma il prodotto di aaa in aa, se a disteso si scrivesse, sarebbe $aaaaa = a^5$; nè può essere altrimenti, posto che i termini delle potestà formano una progressione geometrica, mentre i loro esponenti sono in progressione aritmetica; perchè in tal caso per la natura della moltiplicazione la somma degli esponenti de' fattori dev'essere eguale all'esponente del prodotto, dovendosi verificare, che 1 sia ad a^2, come a^3 ad a^5. Se finalmente le potestà da moltiplicarsi sieno composte, la moltiplicazione procede, come negl'intieri. Soggiungo due esempj, ne' quali si mette distesamente la moltiplicazione delle due potestà $a^2 - 2ab + b^2$ per $a^2 + 2ab - b^2$, e $y^2 + 2ay - \frac{1}{2}a^2$ per $y^2 - 2ay + a^2$. Si dispongano i termini; quei del moltiplicatore ad uno ad uno moltiplichino tutti li termini del moltiplicando, e la somma de' prodotti parziali sarà il prodotto totale.

Es.

Es. I.

$$\begin{array}{l} a^2 - 2ab + b^2 \\ \underline{a^2 + 2ab - b^2} \\ a^4 - 2a^3 b + a^2 b^2 \\ \quad + 2a^3 b - 4a^2 b^2 + 2ab^3 \\ \qquad\qquad - a^2 b^2 + 2ab^3 - b^4 \\ \hline a^4 \quad 0 \quad - 4a^2 b^2 + 4ab^3 - b^4 \end{array}$$

Es. II.

$$\begin{array}{l} y^2 + 2ay - \frac{1}{2}a^2 \\ \underline{y^2 - 2ay + a^2} \\ y^4 + 2ay^3 - \frac{1}{2}a^2 y^2 \\ \quad - 2ay^3 - 4a^2 y^2 + a^3 y \\ \qquad\qquad + a^2 y^2 + 2a^3 y - \frac{1}{2} a^4 \\ \hline y^4 \quad 0 - 3\frac{1}{2} a^2 y^2 + 3a^3 y - \frac{1}{2} a^4 \end{array}$$

CXXXVII. E poichè la Divisione alla moltiplicazione si oppone, la Divisione delle potestà ottiensi per mezzo della sottrazione: Onde essendo della stessa radice, si sottraggono gli Esponenti. Così a^5 diviso per $a^2 = a^3$, cioè

cioè $\frac{aaaaa}{aa} = aaa$. Così anche a^2 diviso per $a^{-3} = a^5$; cioè $\frac{aa}{1} \div \frac{1}{a^3}$ (n. 91.) $= \frac{aa \times aaa}{1} = a^5$. Ciò proviene, perchè essendo i termini delle potestà geometricamente proporzionali, e i loro esponenti proporzionali aritmeticamente, ed essendo per le leggi della divisione il divisore al dividendo, come l'unità al quotiente, ne siegue che la somma degli esponenti del divisore, e del quotiente deve adeguare l'esponente del dividendo, mentre l'esponente dell' unità è zero. Se dunque dall' esponente del dividendo sottraggasi quello del divisore, il residuo sarà l'esponente del quotiente. La divisione poi delle potestà composte si fa coll'istesse regole date per la divisione delle quantità composte (n. 41.) Ne' due susseguenti esempj si vede la serie di questa operazione.

Es. I. $2a^2 - 3ab)\, 6a^3 - 15a^2b + 9ab^2\, (3a - 3b$

$$\begin{array}{l} -6a^3 + 9a^2b \\ \hline 0 \quad -6a^2b + 9ab^2 \\ \quad\;\; +6a^2b - 9ab^2 \\ \hline \qquad\qquad 0 \end{array}$$

Es. II. $a^2)\, a^2 - a^3bc + a^4c\, (1 - abc + a^2c$

e se

e ſe il diviſore foſſe $-a^2$, il quotiente ſarebbe $-1 + abc - a^2 c$.

CXXXVIII. Ora per paſſare al calcolo delle radicali, oltre al dettone nel capo precedente, e ne' prolegomeni, biſogna dippiù avvertire, che i ſegni radicali ſogliono avere non ſolo gli eſponenti, ma anche i coefficienti, che ſono o numeri o lettere premeſſe a' ſegni; e perciò ſi dicono *quantità fuor del ſegno*, come $2\sqrt{3}$, $a\sqrt{b}$ ove il 2 e l' a, che precedono il ſegno radicale ſono i coefficienti delle radici eſpreſſe dal ſegno; e quando non vi ha coefficiente eſpreſſo; vi s' intende l' unità, ſicchè $\sqrt{2}$, $\sqrt{a}$ l'iſteſſo vagliauo che $1\sqrt{2}$, $1\sqrt{a}$. Queſte quantità poi fuor del ſegno poſſono porſi ſotto il ſegno radicale, qualora elevate prima alla poteſtà indicata dall' eſponente della radice, ſi moltiplichino per la quantità eſiſtente ſotto il ſegno. Così $2\sqrt{3} = \sqrt{12}$, elevando il 2 alla poteſtà ſeconda, cioè al 4, e moltiplicando 4 per 3. In ſimil modo $a\sqrt{b-c} = \sqrt{a^2 b - a^2 c}$. Da qui ne viene, che una quantità eſiſtente ſotto il ſegno radicale ſe ha l' iſteſſo eſponente del radicale, è quantità razionale, ed eſtratra la radice ſi pone fuor del

ſe-

ſegno, laſciato ſotto il ſegno ciò, ch' è radicale, come $\sqrt{ab^2} = b\sqrt{a}$, e $\sqrt[n]{a^n b} = a\sqrt[n]{b}$.

CXXXIX. Inoltre ſi danno le radici *univerſali*, e ſono quelle, in cui una quantità radicale comprende un'altra pur radicale, e prendono il nome dall' eſponente, che ambedue abbraccia per una linea orizontale ſovrapoſta. Così $\sqrt{a - b\sqrt{c}}$ ſi dice radice univerſale quadrata, e ſignifica, che dalla quantità $a - b\sqrt{c}$ ſi ha da eſtrarre la radice quadrata; e $\sqrt[3]{2+3\sqrt{5}}$ ſignifica, che dalla quantità $2 + 3\sqrt{5}$ ſi ha da eſtrarre la radice cubica. Dippiù ogniqualvolta ſotto i ſegni radicali vi è la ſteſſa quantità, comunque diverſi ſieno i coefficienti, allora le quantità radicali ſi dicono, e ſono *commenſurabili o tra ſe comunicanti*; come ſarebbero queſte due $3\sqrt{5}$, e $2\sqrt{5}$, perchè ſi può eſprimere la ragione, che tra ſe hanno, la quale è di 3 a 2. Commenſurabili anche ſono $a\sqrt{c - b}$, $d\sqrt{c - b}$, per eſſere tra ſe, come a è al d. Finalmente le radicali ſi chiamano di denominazion diverſa, quando diverſo hanno l'eſponente, dell'iſteſſa, quando hanno l'i-

ſteſſo

ſteſſo eſponenre; e poichè a calcolar le radicali di diverſa denominazione, vopo è ridurle prima all' iſteſſa, qual riduzione non è differente dalla riduzion delle frazioni all' iſteſſo nome (n. 54. e ſegu.) perciò brevemente premetto

PROBLEMA VIII.

Ridurre le quantità radicali di diverſo nome all' iſteſſo.

CXL. Eſſendo gli eſponenti o frazioni, o numeri intieri, e queſti potendoſi facilmenre ridurre a frazioni di qualunque dato denominatore (n. 60.), è chiaro, che le quantità radicali di diverſo nome, cioè che hanno diverſo eſponente, ſi ridurranno all' iſteſſo, come all' iſteſſo nome ſi riducono le frazioni. Quindi per ridurre all' iſteſſa denominazione le radicali $\sqrt[3]{a}$, $\sqrt[2]{b}$, perchè queſte come poteſtà imperfette, vagliono lo ſteſſo che $a^{\frac{1}{3}}$, $b^{\frac{1}{2}}$ (n. 93.) col ridurre le dette frazioni all' iſteſſo nome, avremo $a^{\frac{2}{6}}$,

$b^{\frac{3}{6}}$ dell'istesso valore di prima. Dunque ponendo al segno radicale il comune esponente 6, ed elevando le quantità alle potestà indicate da' numeratori delle frazioni avremo le nuove radicali $\sqrt[6]{a^2}$, $\sqrt[6]{b^3}$ dell' istesso nome, ed eguali alle date. Dico *eguali alle date*, perchè il valor della radice non si muta, comunque o s' inalzi con la moltiplicazione, o si abbassi con la divisione, essendo sempre la quantità a radice non meno di a^2, che di a^3, di a^4 &c. onde moltiplicando $\sqrt[3]{a}$ per 2, il prodotto $\sqrt[6]{a^2}$ non muta valore. La regola dunque generale di questa riduzione in breve è, che ciascuna quantità posta sotto il segno radicale s'inalzi alla potestà indicata dal segno dell' altra alternatamente, e 'l prodotto degli esponenti radicali sia l'esponente comune. Così $\sqrt[3]{\overline{a+b}^2}$, $\sqrt{\overline{x+y}}$, cioè $\overline{a+b}^{\frac{2}{3}}$, $\overline{x+y}^{\frac{1}{2}}$, ridotte all' istesso nome equivagliono a queste $\sqrt[6]{\overline{a+b}^4}$, $\sqrt[6]{\overline{x+y}^3}$, overo $\overline{a+b}^{\frac{4}{6}}$, $\overline{x+y}^{\frac{3}{6}}$. Co-

sì anche $\sqrt[m]{x^u}$, $\sqrt[n]{y^r}$ ridotte, saranno $\sqrt[mn]{x^{\overline{un}}}$, $\sqrt[mn]{y^{\overline{mr}}}$; E $\sqrt[3]{\frac{3}{4}}$, $\sqrt[2]{\frac{2}{3}}$ saranno, ridotte all'istesso nome, $\sqrt[6]{\frac{9}{16}}$, $\sqrt[6]{\frac{8}{27}}$. Se le radici fossero più di due, ridotte le prime due, si passerà alla riduzion delle altre, non altrimente di ciò, che si è detto della riduzione di più frazioni all'istesso nome.

CXLI. Che se l'indice d'una radicale sia divisor perfetto dell'indice dell'altra, come sarebbe in queste $\sqrt[2]{a}$, $\sqrt[6]{c}$, basterà allora moltiplicar l'indice 2 per 3, ch'è il quotiente del maggiore indice pel minore diviso, ed inalzare la quantità a alla potestà indicata dallo stesso quotiente, ed avremo $\sqrt[6]{a^3}$, $\sqrt[6]{c}$. Così $\sqrt[2]{\overline{a+b}^3}$, $\sqrt[6]{\overline{c+e}^7}$, $=\sqrt[6]{\overline{a+b}^9}$, $\sqrt[6]{\overline{c+e}^7}$; l'istesso accaderebbe, se fossero scritte a modo di potestà, cioè $\overline{a+b}^{\frac{2}{3}}$, $\overline{c+e}^{\frac{7}{6}}$, che ridotte saranno $=\overline{a+b}^{\frac{4}{6}}$, $\overline{c+e}^{\frac{7}{6}}$. Si può dare il caso, che l'indice dell'una non sia perfet-

to diviſore dell' indice dell' altra, allora inſegna il Nevvton, doverſi trovare il minimo numero, che poſſa eſattamente dividerſi dagl' indici dati, il quale ſarà l'indice comune delle radicali, ma le quantità eſiſtenti ſotto i ſegni doverſi moltiplicare per ſe ſteſſe una volta meno del numero, in che ſono creſciuti i loro eſponenti. Così $\sqrt[4]{a}$, $\sqrt[6]{c}$ diventeranno $\sqrt[12]{a^3}$, $\sqrt[12]{c^2}$, perchè 12 è il minimo numero eſattamente diviſibile per gl' indici 4, e 6; e divenendo l' indice 4 tre volte maggiore, l'indice 6 due volte maggiore, quindi è, che la quantità a due volte ſi moltiplica per ſe ſteſſa, e diventa cubo, la quantità b una ſola volta, e diventa quadrato.

CXLII. L' eſpoſta riduzione ſerve anche a vedere qual delle radicali ſia di maggior valore, per eſ. ſe $\sqrt[4]{5}$, o $\sqrt[6]{11}$. Ridotte queſte all' iſteſſo nome giuſta la pratica del Nevvton, ſaranno $\sqrt[12]{125}$, e $\sqrt[12]{121}$; Ov' è manifeſto che $\sqrt[12]{125}$ ſupera $\sqrt[12]{121}$, e in conſeguenza $\sqrt[4]{5}$ è mag-

gio-

giore di $\sqrt[6]{11}$. Si deve avvertire però, che in queste riduzioni le quantità fuor del segno, cioè li coefficienti non si mutano giammai.

Così $3\sqrt{2}$, e $4\sqrt[3]{5}$ ridotte serbano gl' istessi coefficienti, cioè $3\sqrt[6]{8}$, e $4\sqrt[6]{25}$.

PROBLEMA IX.

Ridurre le radicali a più semplice espressione.

CXLIII. HA luogo questa riduzione in quelle radicali, da cui comeche non tutta la radice, può però quella di qualche divisore estraersi. Ciò si ottiene, con estraersi ciò ch'è razionale, ponendosi fuor del segno; overo, ch'è lo stesso, col dividersi la quantità esistente sotto il segno per la potestà dell' istesso grado, che ha il segno radicale, ponendosi la radice della potestà, per cui si é fatta la divisione fuor del segno, e 'l quotiente sotto il segno. Per es. $\sqrt{aac + aab}$ sarà ridotta a più semplice espressione in questa forma

$a\sqrt{c+b}$, ove la radice a della poteſtà aa, ch'è dell'iſteſſo grado, che il ſegno radicale, e per cui ſi è fatta la diviſione ſi pone fuor del ſegno, eſſendo quantità razionale, e reſta ſotto il ſegno + il quoziente $c+b$. In ſimile modo $\sqrt[3]{54}$ ſarà più ſemplice in queſta forma $3\sqrt[3]{2}$, con dividere $\sqrt[3]{54}$ per 27 maſſimo cubo contenuto nel 54, e con mettere la radice cubica 3 fuor del ſegno, il quoziente 2 ſotto il ſegno. Così $\sqrt{48aabc}$, eſtrattane la radice del diviſore, ch'è $16aa$, diventa più ſemplice $4a\sqrt{3bc}$. Quando poi nella poteſtà radicale non riluce a un tratto il diviſore dell'iſteſſo grado, che ha il ſegno, biſogna trovar tutt'i diviſori di eſſa, e fra queſti ſcegliere quello dell'iſteſſo grado del ſegno. Per eſ. nella quantità $\sqrt[3]{189}$ non così volentieri ſi offeriſce la maſſima poteſtà cubica, per cui reſti diviſa, ma tra'diviſori di 189 ſi troverà 27, per cui diviſo il 189, ſi laſcia il quoziente 7 ſotto il ſegno, e la radice 3 fuor del ſegno, ed avraſſi la propoſta $\sqrt[3]{189}$ più ſemplicemente eſpreſſa $3\sqrt[3]{7}$.

CXLIV.

CXLIV. La ragione di tal riduzione si può inferire dall' operazione contraria, che per le cose dette certamente va ben fatta; cioè dal potersi ogni quantità razionale esprimersi a modo di radicale, ogni qualvolta elevata alla potestà indicata dall' esponente della radice voluta, si metta sotto il segno radicale. Così la razionale a sarà espressa come radice terza, se moltiplicata due volte per se stessa, cioè elevata alla potestà terza, si metta sotto il segno $\sqrt[3]{\ }$; cosicchè $a = \sqrt[3]{a^3}$, e'l binomio $a + b$, ridotto alla radice seconda, sarà $= \sqrt{aa + 2ab + bb}$. In simil modo $a\sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{a^3 b}$; $2\sqrt{3} = \sqrt{12}$, e $2\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{24}$. Adunque per l'opposito della quantità posta sotto il segno radicale, potrà parte porsi fuor del segno, se da essa si estragga, potendosi, la radice dal segno dinominata.

CXLV. Quindi facilmente si può conoscere, quali radicali dell' istesso grado sieno tra se commensurabili; e lo saranno, qualora più semplicemente espresse, si troveranno avere sotto il segno la stessa quantità. Di fatto troverò commensurabili tra se le due $\sqrt{12}$, e

 $\sqrt{48}$,

$\sqrt{48}$, perchè ridotte che le avrò a più semplice espressione, cioè $2\sqrt{3}$, è $4\sqrt{3}$, saprò esser tra se, come 2 è a 4, cioe com' è $\sqrt{4}$ a $\sqrt{16}$. Similmente $\sqrt[3]{a^3 b}$ è a $\sqrt[3]{bc^3}$, come a è a c, e $2a\sqrt{b}$ a $2c\sqrt{b}$, come $2a$ a $2c$, come a a c.

PROBLEMA X.

Sommare, e Sottrarre le quantità radicali.

CXLVI. 1.° SI riducano all' istessa denominazione, se fossero di diversa, per il probl VIII. 2.° Si riducano, se è possibile, anche a più semplice espressione, per il probl. IX; 3.° Se si trovano commensurabili, delle razionali fuor del segno la somma, o la differenza si premetta alla quantità radicale, come coefficiente. 4.° Se non sono commensurabili le radici, la somma di esse si avrà, scrivendole l' una dopo l' altra co' loro segni, la differenza poi, mutando i segni di quella, che deve sottrarsi; intendendosi però ciò, che si è detto, de' segni, che si premettono a' segni radicali, non di que', che sono sotto di essi. Eccone gli esempj. A sommare $\sqrt{50}$, e $\sqrt{18}$; ridotte a più semplice espressione (n. 140.) diventeranno $5\sqrt{2}$, e $3\sqrt{2}$, onde la somma è

$5 + 3\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$; e la ſomma di $\sqrt{ac^2}$, $\sqrt{ab^2}$ è $c\sqrt{a} + b\sqrt{a} = \overline{c+b}\sqrt{a}$. La ſomma di $\sqrt[2]{20}$, e $\sqrt[3]{24}$, eſpreſſe più ſemplicemente in queſta forma $2\sqrt[2]{5}$, e $2\sqrt[3]{3}$, e ridotte all' iſteſſo nome così, $2\sqrt[6]{125}$, e $2\sqrt[6]{9}$, ſarà $2\sqrt[6]{125} + 2\sqrt[6]{9}$, perchè non ſono tra ſe commenſurabili. Così a ſottrarre $\sqrt{18}$ da $\sqrt{50}$, cioè $3\sqrt{2}$ da $5\sqrt{2}$, la differenza è $5 - 3\sqrt{2}$, overo $2\sqrt{2}$; e la differenza di $\sqrt[2]{20}$, e di $\sqrt[3]{24}$ è $2\sqrt[2]{5} - 2\sqrt[3]{3} = 2\sqrt[6]{125} - 2\sqrt[6]{9}$.

Nelle radicali composte la ſomma, e la ſottrazione ſi fa come nelle razionali; ne ſoggiungo gli Eſempj in due colonne.

Sommare.	*Sottrarre.*
$\sqrt[2]{\overline{ab}} + c$	$\sqrt[2]{\overline{xy}} + c$
$-2\sqrt[2]{\overline{ab}} - \sqrt[3]{\overline{abc}}$	$\sqrt[3]{\overline{cx}} + y$

$c - \sqrt[2]{ab} - \sqrt[3]{abc}$ $\qquad$ $\sqrt[2]{xy} + c - \sqrt[3]{cx} - y$

Sommare. $\qquad$ *Sottrarre.*

$$3\sqrt[2]{ab} - \sqrt[3]{abc} \qquad 4\sqrt{ac} - 3\sqrt[3]{acb}$$

$$-4\sqrt[2]{ab} + 2\sqrt[3]{abc} \qquad 2\sqrt{ac} + 3\sqrt[3]{acb}$$

$$-\sqrt[2]{ab} + \sqrt[3]{abc} \qquad 2\sqrt{ac} - 6\sqrt[3]{acb}$$

Sommare. $\qquad$ *Sottrarre.*

$$\overline{a+b}^{\frac{3}{4}} + c^{\frac{2}{3}} \qquad -\tfrac{1}{3}\left(\overline{x+y}^{\frac{3}{2}} + z^{\frac{3}{2}}\right.$$

$$\overline{a+b}^{\frac{3}{4}} - c^{\frac{2}{3}} \qquad -\left(\overline{x+y}^{\frac{3}{2}} - \tfrac{3}{4}z^{\frac{3}{2}}\right.$$

$$2\,\overline{a+b}^{\frac{3}{4}} \quad 0 \qquad \tfrac{2}{3}\left(\overline{x+y}^{\frac{3}{2}} + \tfrac{7}{4}z^{\frac{3}{2}}\right.$$

PROBLEMA XI.

Moltiplicare le radicali.

CXLVII. SE le radici ſieno eſpreſſe a modo di poteſtà; non altrimente, che queſte, tra ſe ſi moltiplicano (n. 133.). Sic-

Sicchè $a^{\frac{1}{2}}$ in $b^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}}$, cioè $\overline{ab}^{\frac{1}{2}}$; $a^{\frac{1}{3}}$ in $a^{\frac{2}{3}}$ $= a^{\frac{3}{3}}$, cioè $= a$; $x^{\frac{1}{n}}$ in $y^{\frac{1}{n}} = x^{\frac{1}{n}} y^{\frac{1}{n}}$ overo $\overline{xy}^{\frac{1}{n}}$. Ma $x^{\frac{1}{n}}$, $y^{\frac{1}{n}}$ vaglion lo ſteſſo, che $\sqrt[n]{x}$, $\sqrt[n]{y}$, e'l lor prodotto $\overline{xy}^{\frac{1}{n}}$ è lo ſteſſo, che $\sqrt[n]{xy}$. Dunque le radici eſpreſſe per il ſegno radicale, ſe ſieno dell'iſteſſo nome, tra ſe ſi moltiplicano, quando ritenuto lo ſteſſo ſegno, ſotto di eſſo ſi porgono le quantità, l'una dopo l'altra. Non eſſendo poi dell'iſteſſo nome, all'iſteſſo riducanſi per il probl. VIII, prima di moltiplicarſi. Se vi ſono coefficienti, anche queſti tra ſe moltiplichino; Così il prodotto delle radici $a\sqrt[n]{x}$, $2\sqrt[n]{y}$ ſarà $2a\sqrt[n]{xy}$: e $5\sqrt{a} \times 4\sqrt{b}$ $= 20\sqrt{ab}$.

CXLVIII. Se ſi abbia da moltiplicare una radicale per la razionale, o queſta per quella, la razionale ſi premetta come coefficiente; e ſe queſto vi foſſe, per eſſo ſi moltiplichi la razionale, e'l prodotto preceda il ſegno. Così $\sqrt{2}$ in 3, o 3 in $\sqrt{2} =$ $3\sqrt{2}$; $3\sqrt{5}$ in $2 = 6\sqrt{5}$; e $3\sqrt{2}$ in $\frac{1}{7} = \frac{3}{7}\sqrt{2}$.

CXLIX. Quindi non di rado addiviene, che

che il prodotto delle radicali ſia una quantità razionale. Ciò accade, ſempre che le radicali ſono tra ſe comunicanti, e 'l ſegno radicale è quad:atico, come ſarebbe il prodotto di $3\sqrt{2} \times 5\sqrt{2} = 15 \times 2 = 30$; ma talvolta anche quando non ſono tra ſe comunicanti, come il prodotto di $2\sqrt{ab^2} \times 4\sqrt{a} = 8\sqrt{a^2 b^2} = 8ab$. Si avverta però, che il prodotto di $\pm\sqrt{b}$ in $\pm\sqrt{b}$ è $\pm\sqrt{b^2}$, cioè $\pm b$ col doppio ſegno, il quale, trattandoſi di radici, non deve mai ommetterſi.

CL. Le radicali compoſte ſi moltiplicano, come ſe foſſero razionali, oſſervata la legge de' ſegni (n.30.); Ov' è da oſſervarſi, che ſe un binomio quadratico ſi moltiplichi per ſe ſteſſo, col cambiarſi però in un de fattori il ſegno + in —, ovvero — in +, ſi produce un monomio razionale; per eſ. $\sqrt{5}+\sqrt{3} \times \sqrt{5}-\sqrt{3}$, dà $5-3=2$; e ciò diceſi *moltiplicare un binomio per il di lui contrario*; ſiccome un trinomio radicale quadratico moltiplicato per ſe ſteſſo col cambiarſi in un de fattori un de ſegni, produce un binomio parte razionale, e parte radicale, come ſarebbe $\sqrt{6}+\sqrt{2}+\sqrt{5} \times \sqrt{5}-\sqrt{2}+\sqrt{5} = 9+2\sqrt{15}$.

CLI. La ragione di quanto ſi è detto ſi deduce dalla natura ſteſſa della moltiplicazione,

ne, per cui l'unità è alla quantità moltiplicante, come la moltiplicanda al prodotto. Sieno pertanto li fattori $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$. Sarà 1 a $\sqrt{2}$, come $\sqrt{3}$ a x; nell'istessa ragione saranno anche i loro quadrati, cioè 1 a 2, come 3 a x^2. Dunque $x^2 = 6$, e consequentemente $x = \sqrt{6}$: E in vero se 2×3, che sono i quadrati delle date radici $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, dà il prodotto $= 6$; anche $\sqrt{2} \times \sqrt{3}$, che sono de' sudetti quadrati le radici, dà il prodotto $= \sqrt{6}$.

PROBLEMA XII.

Dividere le radicali.

CLII. Quest'operazione dev' essere totalmente opposta alla precedente. Pertanto o le radici sono espresse a modo di potestà imperfette, e la divisione di esse si fa nell'istesso modo, che delle potestà perfette. O sono espresse col segno radicale, e allora dell'istesso nome essendo, si divide la quantità esistente sotto il segno nella radice dividenda per quella, che esiste sotto il segno nella radice dividente, e 'l coefficiente di quella, se vi è, pel coefficiente di questa; Se poi sieno di diverso esponente, o si riducano prima della divisione all'istesso nome, o si accenni la divisione

ne con ſcriver le radici a modo di frazioni. Gli eſempj metteranno in chiaro l'eſpoſte leggi $a^{\frac{3}{4}}$ diviſa per $a^{\frac{1}{4}}$ dà il quotiente $a^{\frac{2}{4}} = a^{\frac{1}{2}}$; $a^{\frac{1}{4}}$ diviſa per $b^{\frac{1}{2}}$ dà il quotiente $\frac{a^{\frac{1}{4}}}{b^{\frac{1}{2}}}$; overo

$a^{\frac{1}{4}} \div b^{\frac{1}{2}}$; $\overline{bx}^{\frac{1}{n}}$ per $\overline{ax}^{\frac{1}{n}}$ dà $\frac{b^{\frac{1}{n}}}{a^{\frac{1}{n}}}$. Così il quotiente di $\sqrt{2}$ per $\sqrt{2}$ è 1, di $\sqrt{b^2}$ per $\sqrt{bc} = \sqrt{\frac{b}{c}}$ di $\sqrt{a}$ per $-\sqrt{b} = -\sqrt{\frac{a}{b}}$; di $6\sqrt{ab}$ per $2\sqrt{a} = 3\sqrt{b}$.

CLIII. Se le radici ſono commènſurabili, e comunicanti, ſi dividano le quantità eſiſtenti fuor del ſegno, e 'l quotiente ſarà razionale; come $8\sqrt{3} \div 2\sqrt{3} = 4$; $a\sqrt{\overline{a+b}} \div b\sqrt{\overline{a+b}} = \frac{a}{b}$. L'iſteſſo s'intenda delle radicali frazionarie; e in queſte ſe dal ſolo denominatore, o dal ſolo numeratore ſi poſſa eſtrarre la radice, ſe n'eſtragga, con premettere all'altro termine, da cui non ſi è eſtrat-

ta, il segno radicale. Così $\frac{\sqrt{axx}}{\sqrt{ab}} = \sqrt{\frac{xx}{b}}$, overo $\frac{x}{\sqrt{b}}$; e $\sqrt{\frac{bc}{aab}} = \sqrt{\frac{c}{aa}}$, overo $\frac{\sqrt{c}}{a}$.

CLIV. Dovendosi dividere una radicale per qualche razionale, o al contrario, la razionale può elevarsi alla potestà indicata dal segno della radicale, e porsi sotto il medesimo segno. Così $\sqrt{ab^2} \div b = \sqrt{ab^2} \div \sqrt{b^2} = \sqrt{a}$. Se dalla divisione delle radicali ne nasca un quotiente, da cui possa estrarsi la radice denominata dall'esponente del segno, estratta questa, e moltiplicata per il quotiente della divisione de' coefficienti, s'avrà una quantità razionale. Per es. $12\sqrt{8} \div 3\sqrt{2}$, perchè 8 diviso per 2 da 4, da cui può estrarsi la radice seconda denominata dall'esponente del segno radicale, e questa radice è 2, per 2 moltiplico il quotiente de' coefficienti, cioè di $12 \div 3 = 4$, e scrivo il prodotto $8 = 12\sqrt{8} \div 2\sqrt{2}$.

CLV. La divisione delle radicali composte si fa coll'istesse leggi, che quella delle razionali, come si può raccogliere dagl'infrascritti Esempj.

Es.

Ef. I. $\sqrt{a} - \sqrt{b}) \sqrt{ac} - \sqrt{ad} + \sqrt{bd} (\sqrt{c} - \sqrt{d}$

$$- \sqrt{ac} + \sqrt{bc}$$

$$0$$

$$+ \sqrt{ad} - \sqrt{bd}$$

$$0$$

Ef. II. $\sqrt{3}) \sqrt{15} + \sqrt{21} - \sqrt{27} (\sqrt{5} + \sqrt{7} - 3$.

CLVI. L'efpofte leggi fi dimoftrano per la natura della Divifione. Imperochè nella divifione il divifore è al dividendo, come l'unità al quotiente (n. 32.) Dunque nel dividere $\sqrt{12}$ per $\sqrt{4}$, $\sqrt{4}$ è a $\sqrt{12}$ come 1 a Q, cioè al quotiente, e nell'ifteffa ragione faranno anche i loro quadrati, cioè 4 a 12, come 1 a Q $(= 3)$, in confequenza $Q = \sqrt{3}$, fecondo la regola. Dippiù qualora le poteftà fono in geometrica progreffione, e gli efponenti in aritmetica, quefti fi hanno in conto de' logaritmi di quelle (n. 80.), onde la lor differenza è l'efponente del quotiente (n. 34.), che rifulta dalla divifione de' due termini corrifpondenti in geometrica proporzione; poichè la divifione col fottrarre disfà ciò, che la moltiplicazione (n. 133) ha fatto col fommare. Quindi è, che volendofi dividere $\sqrt{a^5}$ per $\sqrt{a^3}$,

tra-

trasformate dette radicali in poteſtà imperfette, $a^{\frac{5}{2}}$, $a^{\frac{3}{2}}$, ne ſiegue, che dividendo l'una per l'altra, il quoziente ſarà $a^{\frac{5-3}{2}} = a^{\frac{2}{2}} = a^1$. Così $\sqrt{a^3} \div \sqrt{a^7}$, ſi farà $a^{\frac{3}{2}} \div a^{\frac{7}{2}} = a^{\frac{3-7}{2}} = a^{\frac{-4}{2}} = a^{-2} = \frac{1}{a^2}$. E univerſalmente $a^m \div a^n = a^{m-n}$; $a^m \div a^{-n} = a^{m+n}$ &c.

PROBLEMA XIII.

Inalzare le radicali a poteſtà ſuperiori.

CLVII. PER inalzare una quantità radicale a qualche poteſtà, il di cui eſponente ſia l'iſteſſo, che l'indice della radicale, allora baſterà cancellare il ſegno radicale; ch'è lo ſteſſo, che dividere l'eſponente della poteſtà cercata per l'indice della radicale (n. 120). Così $\sqrt[2]{a}$ elevata alla poteſtà ſeconda è $a^1 = a$, perchè $\frac{2}{2} = 1$; e in genere $\sqrt[n]{x}$ elevata alla poteſtà n è x. Ciò anche

nc

ne verrà, quando accade, che per la moltiplicazione si giunga a tal potestà, che abbia lo stesso esponente della radicale, come $\sqrt[6]{a^2}$ in $\sqrt[6]{a^4} = \sqrt[6]{a^6}$, cioè $a^{\frac{6}{6}} = a$. Ma perchè non si erri ne' segni +, e − da premettersi alla radicale bisogna avvertire, che ogni quantità, qualunque sia, s'intende sempre moltiplicata per l'unità affetta dell'istesso segno della quantità; sicchè $\sqrt[n]{a+b}$ si deve considerare, come $1 \times \sqrt[n]{a+b}$, e $-\sqrt[n]{a+b}$, come $-1 \times \sqrt[n]{a+b}$: Onde il prodotto di $\sqrt[n]{a+b}$ in $-\sqrt[n]{a+b}$ è l'istesso, che il prodotto di $1 \times \sqrt[n]{a+b}$ in $-1\sqrt[n]{a+b}$, qual'è $-1 \times \overline{a+b} = -a-b$.

CLVIII. L'istesso si dica delle radicali espresse a modo di potestà, nelle quali secondo le leggi della moltiplicazione si prenda il doppio, se alla seconda, il triplo, se alla terza, il quadruplo de' loro esponenti, se alla quarta potestà si vogliano elevare. Così il qua-

drato

drato di $a^{\frac{1}{2}}$ $(=\sqrt{a})$ è $a^{\frac{2}{2}} = a^1$, il cubo è $a^{\frac{3}{2}}$ &c. In simil modo se si abbia da elevare alla terza potestà la quantità $\sqrt{a^{-1}}$; si faccia $\sqrt{a^{-1}} = a^{-\frac{1}{2}}$; quindi $a^{-\frac{1}{2}\times 3} = a^{-\frac{3}{2}}$ sarà il cubo di detta radicale.

PROBLEMA XIV.

Estrarre le radici dalle radicali.

CLIX. Il metodo dev' essere diverso da quello del precedente problema. Consiste nell' estrarre la radice della quantità esistente sotto il segno: onde la radice quadrata di $\sqrt[n]{a^4}$ è $\sqrt[n]{a^2}$, la radice terza o cubica di $\sqrt{a}$ è $\sqrt{a^{\frac{1}{3}}}$, che si può esprimere anche in questa forma $\sqrt[3]{\sqrt{a}}$, e vuol dire la radice terza della radice seconda di a; e perciò si chiamano queste radici *Radicali di radicali*, il calcolo delle quali è l'istesso, che delle altre radicali.

CLX. Se poi le radici ſi eſprimano a modo di poteſtà frazionarie, i loro eſponenti ſi dividano per l'indice della radice da eſtraerſi; Così la radice ſeconda di $\overline{a+b}^{\frac{1}{3}}$ è $\overline{a+b}^{\frac{1}{6}}$, e generalmente la radice m della quantità $\overline{x-y}^{\frac{1}{n}}$ è $\overline{x-y}^{\frac{1}{nm}}$.

PROBLEMA XV.

Calcolare le radici univerſali.

CLXI. Coſa ſieno le radici univerſali, ſi è dichiarato nel n. 139., il loro calcolo non è diverſo dal calcolo delle altre radicali. Perciò I., ſe ſieno di diverſo nome; ſi riducano, prima di ſommarle, o ſottrarle, all' isteſſa dinominazione, per il probl. VIII.

Sieno per eſ. $\sqrt{b+\sqrt{cb}}$, e $\sqrt[3]{a-\sqrt[3]{bc}}$ da ridurſi all'isteſſo nome: gli eſponenti frazionarj delle medeſime $\frac{1}{2}$, e $\frac{1}{3}$ ridotti all' isteſſo nome ſaranno $\frac{3}{6}$, e $\frac{2}{6}$; onde il ſegno radicale comune ſarà $\sqrt[6]{}$; quindi la quantità $b+\sqrt{cd}$ s'inalzi alla

la terza poteſtà, e la quantità $a - \sqrt[3]{bc}$ alla ſeconda, e diverranno, ridotte all'iſteſſo nome, $\sqrt[6]{b^3 + 3bcd + (3b^2 + cd) \times \sqrt[2]{cd}}$, e $\sqrt[6]{a^2 - 2a \times \sqrt[3]{bc} + \sqrt[3]{b^2c^2}}$; ridotte finalmente le radicali comprese ſotto il ſegno univerſale $\sqrt[6]{}$, cioè $\sqrt[2]{cd}$, e $\sqrt[3]{bc} + \sqrt[3]{b^2c^2}$ all' iſteſſo nome, ſarà quella $= \sqrt[6]{c^3d^3}$, e queſta $= \sqrt[6]{b^2c^2} + \sqrt[6]{b^4c^4}$. II. Se ſieno capaci di più ſemplice eſpreſſione, ciò ſi faccia per il probl. IX. Così $\sqrt{a^2b + a^2c\sqrt{d}}$ diviſa per a^2, ſi avrà il quotiente ſotto il ſegno, e la radice a fuor del ſegno, cioè $a\sqrt{b + c\sqrt{d}}$. III. La ſomma di eſſe all' iſteſſo nome ridotte ſi ha per mezzo del ſegno $+$, e la ſottrazione per il ſegno $-$; Così $3\sqrt{a + b\sqrt{c}} + 2\sqrt{bc + \sqrt{d}}$ è la ſomma di eſſe, e $3\sqrt{a + b\sqrt{c}} - 2\sqrt{bc + \sqrt{d}}$ è la lor differenza. IV. La moltipli-

tiplicazione, e divisione si fa come delle altre radicali; ma si noti, che dovendosi una radice universale moltiplicar per se stessa, e 'l segno universale essendo $\sqrt[2]{}$, cioè della seconda potestà, allora si avrà il prodotto, con cancellare il solo segno universale. Così $\sqrt{\frac{1}{2}q+\sqrt{7p}}$ moltiplicata per se stessa, sarà $= \frac{1}{2}q + \sqrt{7p}$; e la ragion' e, perche tolto il segno quadratico, si ha il quadrato.

PROBLEMA XVI.

Calcolare le radici impossibili o immaginarie.

CLXII. COmeche le radici, il di cui esponente sia di numero pari, d'una quantità negativa, sieno impossibili e immaginarie (n.97., e 123.) ciò non ostante però esse anche si sommano, si sottraggono, si moltiplicano, si dividono, come le vere e reali radici. Così la somma delle due $\sqrt{-a^2}$, $-3\sqrt{-a^2}$ sarà $-2\sqrt{-a^2}$; e la somma delle due $-\sqrt{-x^2}$, $\sqrt{-y^2}$ è $-\sqrt{-x^2}+\sqrt{-y^2}$; e la somma di $b+\sqrt{-a^2}$, $b-\sqrt{-a^2}$ è $2b$. Così sottraendo $\sqrt{-a^2}$ da $-3\sqrt{-a^2}$, le differenza, o il residuo sarà $-4\sqrt{-a^2}$; e sottraendo $b+\sqrt{-x^2}$

da

da $c + \sqrt{-x^2}$, la differenza è $c - b$.

CLXIII. Nella moltiplicazione, benchè non si ha da procedere diversamente, che in quella delle altre radici, per non errare però ne' segni da premettersi al prodotto, i fattori s'intendano sempre moltiplicati per l'unità, come si è avvertito al n. 157. Per es. a moltiplicar le radici $\sqrt{-b}$, $\sqrt{-c}$, si scrivano i fattori in questa forma $\sqrt{-1} \times \sqrt{b}$, $\sqrt{-1} \times \sqrt{c}$; or si moltiplichino tra se, e sarà il prodotto $-1 \times \sqrt{bc}$, cioè $-\sqrt{bc}$. Se a questo non si avvertisse, ne verrebbe il prodotto $\sqrt{bc}$, che potrebbe stimarsi positivo, quando realmente è negativo. Di fatto $\sqrt{-a} \times \sqrt{-a}$ dà certamente $-\sqrt{a^2}$, o $-a$, non già $\sqrt{a^2}$, overo a, perchè la radice quadrata moltiplicata in se stessa, dà per prodotto ciò, di che è radice. Per l'istessa ragione, ma in contrario senso presa, volendosi divisa $\sqrt{-bc}$ per $\sqrt{-c}$, si faccia $\sqrt{-1} \times \sqrt{bc} \div \sqrt{-1} \times \sqrt{c}$, sarà il quotiente $1 \times \sqrt{b}$, overo $\sqrt{b}$.

E questo basti aver detto del calcolo delle quantità compreso sotto il titolo d'Algoritmo.

PARTE II.

Della Equazione in generale, e delle Proporzioni.

OPO l' Algoritmo, cioè il calcolo universale delle quantità così numeriche, come letterali viene a proporsi la dottrina dell' Equazioni, e proporzioni. L' ordine pare a prima vista retrogrado, se alla teoria dell' uno e dell' altra si abbia riguardo; ma non l' è, se si riguardi il metodo, cui nella pratica, e nelle istituzioni si debbe sopra d' ogni altro attendere, acciocchè dalle cose più semplici alle meno semplici si passi, e i precetti del calcolo precedano le altre cose, che per via di calcolo hansi a trattare. E invero benchè dalle proporzioni, come da ubertoso fonte tutta, quant' ella è la matematica, e ciascuna delle sue parti, per consequente lo stesso algoritmo deriva; non è da negarsi però, essere miglior consiglio cominciar dalle regole aritmetiche, e quindi richiamatele a suoi principj farle servir di scorta a tutto il rimanente. Oltracchè sebbene le operazioni aritmetiche, spe-

ſpecialmente la moltiplicazione, la diviſione e quelle, che da eſſe derivano, la formazion delle poteſtà, e l'eſtrazion delle radici nelle leggi della proporzione ſi fondino, nientedimeno a ben'eſprimere i termini comunque proporzionali, e a rettamente diſporli, ragion volea, che prima ſi dichiaraſſero le note, con cui ſi eſprimono, e le maniere, co' cui o l'una all'altra ſi giunge, o queſta da quella ſi ſottrae, o ſe ne trova il prodotto, overo il quotiente; perchè quindi s'intendano i varj rapporti, che aver poſſono tra ſe conſiderate, e ſe ne trovino l'Equazioni, e per mezzo di eſſe i problemi matematici ſi riſolvano. In tre Sezioni queſta Parte ſeconda sarà anch'eſſa diviſa. Nella prima ſi tratterà della ragion d'eguaglianza in genere, o dell'Equazione generalmente conſiderata; nella ſeconda della proporzione Aritmetica; nella terza della Geometrica, e anche de'Logaritmi, e dell'Armonica proporzione.

SEZION I.

Della Ragion d'Eguaglianza, o dell' Equazione in generale.

CLXIV. Comeche sotto nome d'Equazione presso gli Algebristi venga il rapporto di due quantità, perche ad eguaglianza si riducano, ella nientedimeno realmente non è, che la stessa ragion d'eguaglianza: onde si confonde con essa, e l'una per l'altra indistintamente si prende. La materia dell'Equazioni apparterrebbe alla Parte III. dove si tratterà della risoluzione dell' Equazioni, e de' Problemi così aritmetici, come geometrici; ciò non ostante stimo agevolar l'intelligenza delle cose, che spettano alla dottrina delle proporzioni, con premettere le nozioni generali delle Equazioni, il modo di trovarle, il modo di risolverle, il modo di applicarle &c.

PROLEGOMENI.

Circa le nozioni generali delle Ragioni, e dell'Equazioni.

CLXV. Egli è noto, chiamarsi comunemente da matematici Ragione il paragone, che si fa di due quantità omogenee in riguardo

alla

alla quantità stessa; e potendosi le quantità paragonate trovare o eguali, o ineguali, la Ragione può dirsi o d'eguaglianza, ò d'ineguaglianza. La ragione d'eguaglianza, detta anche propriamente Equazione, col segno $=$ si esprime, ed ha due membri, o due parti, la prima è tutto ciò, che precede il segno d'eguaglianza, la seconda è tuttociò, che lo segue; sicche $ax+bx=c^2$ significa, che il prodotto dell' incognita x nella cognita $a+b$ (che forma la prima parte dell' equazione) è eguale al quadrato di c, ch'è la seconda parte.

CLXVI. Equazione adunque è un rapporto d'eguaglianza, che due o più quantità, sieno esse numeriche, geometriche, o fisiche, hanno tra loro insieme paragonate, o che hanno col zero, se con esso si paragonano. Ovvero, riguardo ad una stessa quantità, Ella è l'espressione d'una quantità per mezzo di due valori diversi, ma eguali. Può esser di differente grado, secondo che diversa è in essa la massima potestà, a cui la quantità incognita trovasi elevata; e si dirà di *primo grado*, *semplice*, *o lineare* quella, ove l'incognita non passa la prima dimensione o potestà, cioè ha l'unità per esponente; tal sarebbe $x+c=a$, overo $a^2x+b^3=c^3$ Dirassi di *secondo grado*, *quadra-*

drata, o *piana*, quando in essa la massima potestà dell'incognita è il quadrato, cioè ha per esponente il 2; Di *terzo grado*, *cubica*, o *solida*, quando l'incognita ascende al cubo, ed ha per esponente il 3; e generalmente si dirà Equazione del *grado n*, se in essa l'incognita alla potestà n trovasi elevata; e genericamente Equazion *composta*, ogni qualvolta in essa l'incognita ha più dimensioni.

CLXVII. L'equazione, in cui vi è una sola incognita, si chiama *determinata*; *indeterminata* quella, che ha più incognite. Della prima sorte è questa $ax + bx = c^2$, essendovi una sola incognita x; della seconda sorte quest'altra $2xy + cy = 4bc + a^2$, in cui v'ha due incognite x, e y. La radice poi dell' Equazione è il valore, che in essa l'incognita ottiene: Onde se $x = a + b$, la somma di a, b è la radice dell'equazione, tanto valendo l'incognita x, quanto vale la detta somma; e dell'equazione $x^2 = 25$, la radice è 5; e se $x^2 = ab$ la radice di questa equazione è $\sqrt{ab}$. Questa radice si dice positiva, se si esprime per una quantità positiva; negativa, se per una quantità negativa, impossibile, se per una quantità immaginaria. Così nell'

nell' equazioni $x=a$, $x=-a$, $x=\sqrt{-a}$ la radice della prima è positiva, della seconda è negativa, della terza è impossibile.

CLXVIII. Risolver l'equazione è l'istesso, che ritrovare il valor dell' incognita, che, come si è detto, è la radice dell'equazione. A tale scopo tendono le operazioni, che si fanno nel rimenare i termini dell' equazione in modo, che in una parte finalmente si trovi l'incognita, nell' altra il valor di essa, cioè tutte le cognite. Queste operazioni però debbon'essere tali, che mai non tolgano l' egualtà de' due membri; il che s'ottiene, con aggiungere, o levare all'uno e all'alrro membro l'istessa, o quantità eguali; poiche è certo, che se $ax+cx=b^2$, con aggiungere all' una e all' altra parte f^2, sarà $ax+cx+f^2=b^2+f^2$ e con sottrarre f^2, sarà anche $ax+cx-f^2=b^2-f^2$. Lo stesso s'ottiene ancora, se l' uno e l'altro membro si moltiplichi, o si divida per l'istessa quantità, o per eguali: Sicchè essendo $ax+cx=b^2$, moltiplicando o dividendo l' una e l' altra parte per f, s' avrà $fax+fcx=fb^2$, e $\frac{ax+cx}{f}=\frac{b^2}{f}$. Inoltre rimane l' egualtà de' membri, se all' istessa potestà

teſtà s' inalzino, o da eſſi l' iſteſſa radice eſtraggasi; mentre non può rivocarsi in dubbio, che le poteſtà di quantità eguali, o di eguali poteſtà le radici sieno anch' eſſe eguali: onde s' avrà $\overline{ax+cx}^{n} = b^{2n}$; e $\overline{ax+cx}^{\frac{1}{n}} = b^{\frac{2}{n}}$ Finalmente non ſi toglie l'egualtà, ſe ad una quantità ſi ſoſtituiſca un' altra a lei eguale: Così data l' equazione $ax + cx = b^2$, ſe coſti eſſere $cx = \frac{mx}{n}$, ſarà ſenza dubbio $ax + \frac{mx}{n} = b^2$, e ſe abbiaſi $x = a + n$, e coſti, che $n = c + d$, ſarà $x = a + c + d$.

CLIX. Con una, o con più delle operazioni accennate ſi viene alla riſoluzione dell' equazione; ma prima biſogna ritrovar l'equazione adattata al queſito, cioè ordinare i termini della queſtione, ſicchè formino l'equazione; e poi fa duopo quella operazione infra le altre eleggere, ch' è più opportuna all'intento; nel che non è ſempre così facile a riuſcire, e tanto maggiore ſuol eſſer la difficultà, quanto è maggiore il grado dell' equazione, che haſſi a riſolvere. Perciò niente ſi è laſciato dagli Algebriſti intentato, affin di ſminuire tal difficultà, con iſtabilire metodi ſicuri a conſeguire l' intento.

C A-

CAPO I.

Del trovar l' Equazione.

CLXX. PRima d' ogni altro si deve procurare di ben'intendere ciò, che el proposto problema si chiede, esaminando on diligenza le condizioni tutte del quesito. mperochè contenendosi in ogni problema olre l' incognita quantità, che si cerca, ancor data, o le date quantità, che son di noto alore, chiara cosa è, che prima di venire al soluzion del problema, hassi a comprende- la relazione, che il noto e 'l dato ha all' ncognito, e al quesito, qual relazione non alrimente, che per le apposte condizioni, e er gli aggiunti del problema si può conosce-. Per es. propongasi a risolvere questo prolema aritmetico: *Ritrovar due numeri, la somа de quali sia* 100, *la differenza* 40. Già si ede, che quì additansi quattro numeri, due ati, e cogniti, cioè 100, e 40, due altri, ie si hanno a trovare; ma per trovarli, quaesser debbono, bisogna che si cerchino giua le condizioni apposte, che spiegano le rezioni, che a' dati numeri li quesiti debbono vere. Le condizioni sono due cioè che i nuneri da trovarsi insieme presi facciano 100,

e che

e che il minor numero dal maggiore ſottratto dia 40. di reſto.

CLXXI. Compreſo per mezzo delle condizioni ben digerite lo ſtato della queſtione, si hanno a denominare le quantità; cioè le cercate con le ultime, le date con le prime lettere dell'alfabeto: Sicche nell' addotto problema la data ſomma = 100 chiamerei *a*, la data differenza = 40, *b*; ma i due numeri da trovarsi, si direbbero x, e *y*. Ov' è da oſſervare, che qualora debbono denominarsi coſe di ſpecie diverſa, è meglio uſar le lettere iniziali delle medesime, perche più facilmente si diſtinguano: Così ſe dato il moto equabile d' un Corpo, e 'l tempo, in cui si muove, si cerchi la velocità, farà ben fatto l'eſprimere il moto con la lettera *m*, il tempo con la *t*, e la velocità con la *v*. Si avverta eziandio, che per la ſoluzion più ſpedita ed elegante del problema giova molto il non moltiplicar lettere, quanto far si può, nella dinominazion delle quantità. Così dovendosi trovar due quantità, di cui una sia tripla dell'altra, ſe la minore si chiama x, l'altra dovrà chiamarsi piuttoſto 3x, che *y*. E nell' eſ. di ſopra addotto, dinominata che sia la ſomma de' numeri dati con la lettera *a* la lor diffe-

fferenza con la lettera b, e 'l minor nume-
da trovarsi $= x$, il maggiore piuttosto che
, potrà chiamarsi o $x + b$, o $a - x$, costan-
dell' aritmetica, che tanto la differenza
unta al numero minore, quanto il minor
umero sottratto dalla somma dà il maggiore.

CLXXII. Finalmente ben dinominate le
uantità così cognite, come incognite si con-
derino tutte dell' istessa maniera, come se no-
fossero, e secondo le relazioni, che tra se
trovano avere, se ne formino tante equa-
oni, quante sono le condizioni nel problema
roposte. Di fatto essendo due le condizioni
el problema sudetto, cioè che la somma de
umeri da trovarsi, detta a, sia eguale a 100,
la differenza, detta b, eguale a 40, avrò
ue equazioni, cioè $x + y = a$, $y - x = b$,
uali equazioni non altro, che le stesse con-
zioni del problema esprimono. Intanto il
umero maggiore incognito y può dinotarsi
er $x + b$: onde se ad y si surroghi il suo va-
ore $x + b$ nella prima equazione, avrassi, in
ece dell'equazione $x + y = a$, l'altra $x + x + b$,
oè $2x + b = a$, in cui una sola è l' incogni-
. Lo stesso si otterrà, se ben ponderate le
lazioni tra le cognite e le incognite quanti-
, si procuri, che una delle due almeno in

due

due maniere si esprima, poichè le due espressioni all'istessa quantità appartenendo, sono necessariamente tra se eguali: onde istituita la nuova equazione, vi si troverà una sola incognita, e dippiù il valor di lei. Così esprimendo, come sopra, a la somma, b la differenza, e x il numero minore, sarà il numero maggiore $x+b$, overo $a-x$ Sarà dunque la nuova equazione $x+b=a-x$, la quale per quello, che or ora diremo, si ridurrà a questa $2x+b=a$, come dianzi.

CAPO II.

Del risolvere l' equazione.

CLXXIII. Istituite, come si è detto, l'equazioni giusta le condizioni del problema, perchè quindi si trovi il valor dell' incognita, non altro hassi a fare, se non separare l'incognita dalle cognite, con fare in maniera, che que' termini, che contengono l'incognita, si trovino in una parte dell'equazione, e nell' altra que', che non la contengono. Ciò si otterrà con trasferire, quando sia duopo, i termini dall' una nell' altra parte, mutati i segni, ch'è lo stesso, che aggiungere

; o levare all'uno e all'altro membro dell'
uazione la stessa quantità. Che se poi l'in-
gnita si trovasse moltiplicata, o divisa per
alche altra quantità, per questa tutta l'e-
azione si divida, o si moltiplichi; e in tal
aniera resterà l'incognita separata dalle co-
ite, trovandosi quella in una parte dell'e-
iazione; nell'altra le cognite, che formano
valo e c... ato dell'incognita.

CLXXIV. Abbiasi per es. a risolvere l'e-
iazione $x - b + c = a$. Secondo che dian-
si è detto, si trasferisca nell'altra parte
$b + c$, col cangiarsi li segni, e si avrà $x =$
$+ b - c$. Quest'operazione, che dal greco si
iiama *Antitesi*, fa, che l'incognita x, con
asferirsi $- b + c$, resti sola da una parte; nè
on ciò si toglie l'egualità, perchè il trasferi-
e la quantità $- b + c$ dall'uno all'altro mem-
ro mutati li segni, altro non è che aggiun-
gerla ad ambedue. Sarà dunque $x - b + c + b - c$,
ioè $x = a + b - c$. Così anche $x + b = a$,
sottraendo dall'una e dall'altra parte b) a-
rassi $x = a - b$; e $x - b = c$) aggiungendo
d'ambedue le parti la b) avrassi $x = c + b$.
Quindi per mezzo dell'Antitesi talvolta le quan-
tità negative diventano positive, e al con-
trario, come nell'equazione $a - x = b + c$

N ... per-

perche si abbia il valore dell'incognita, si trasferiscano i termini b, c nell'altra parte cambiati li segni, e sarà $a - b - c = x$. Si può fare ancora, che trasferiti tutti li termini all' istessa parte, tutta la collezion de' termini diventi eguale a zero, come $x^2 + ax = b$ sarà per antitesi $x^2 + ax - b^2 = o$, ed è certo, che se $x = 4$, $x - 4 = o$; il che è di grand' uso presso gli Algebristi per la risoluzione dell' Equazioni.

CLXXV. Ma se l'incognita si trovi moltiplicata per le cognite, a separarla da queste, non basta la sola trasposizione, fa duopo della divisione. Sia per es. $ax + bc = mx + na$. Si trasporti mx nel primo membro, bc nel secondo con cambiarne i segni, e si avrà $ax - mx = na - bc$; in questa equazione i termini, che contengono l'incognita, gia si trovano nell'istessa parte; ma perchè l'incognita ancor si trova moltiplicata per le cognite $a - m$ per questa quantità si divida tutta l'intera equazione, e s'varà $x = \frac{na - bc}{a - m}$. Per l'istessa ragione trovandosi l'incognita divisa per le cognite, bisogna, dopo d'aver usata, se sia duopo, la trasposizione, separarla dalle cognite per mezzo della moltiplicazione. Sia l'equa-

zio-

zione $\frac{x}{b}-\frac{d}{m}=\frac{a}{n}$; trasferito il termine $\frac{d}{m}$, sarà $\frac{x}{b}=\frac{a}{n}+\frac{d}{m}$; e moltiplicata l'equazione per b, sarà $x=\frac{ab}{n}+\frac{db}{m}$. Così a risolvere l'equazione $\frac{ay}{c}-b=\frac{dy}{f}+\frac{mn}{g}$, se ne tolgano i divisori, fattane successivamente la moltiplicazione, cioè si moltiplichi prima per c, e si avrà $ay-bc=\frac{cdy}{f}+\frac{cmn}{g}$; poscia per f, e avrassi $ayf-bcf=cdy+\frac{cfmn}{g}$; finalmente per g, e ne verrà $ayfg-bcfg=cdyg+cfmn$. Or trasferendo i termini s'avrà $afgy-cdgy=bcfg+cfmn$, cioè a dire $y\times\overline{afg-cdg}=bcfg+cfmn$; Onde dividendo per $afg-cdg$, sarà $y=\frac{bcfg+cfmn}{afg-cdg}$.
Sia data l'equazione $\frac{a}{x}-\frac{m}{n}=\frac{c}{b}$, si moltiplichi per x, n, b affin di liberarla da' divisori, ed avremo $abn-bmx=cnx$, e per l'antitesi $abn=x\times\overline{bm+cn}$, overo $x=\frac{abn}{bm+cn}$.

CLXXVI. Nel caso poi, che l'incognita si trovasse elevata, il valor di lei si avrà, con estrarre dall'una e l'altra parte la radice omogenea. Questa operazione nell'equa-

zioni di secondo grado non ha difficultà, come l'ha nell'equazioni di più alto grado, la risoluzion delle quali vien riserbata per la III. parte. Imperochè è chiaro, che se $x^2 = 16$, estratta da ambedue le parti la radice quadrata, resta $x = 4$; com' anche da $x^2 = a^2 + 2ab + b^2$ estratta la radice, rimane $x = a + b$. Per l'opposito essendo i termini dell'equazione radicali, e omogenei, si elevino alla potestà indicata dall'esponente della radice: Così se $\sqrt{y} = 6$, sarà $y = 36$, e se $\sqrt{x} = \sqrt{d+c}$, sarà $x = d + c$, ed essendo $\sqrt{x} = a + b$, sarà $x = a^2 + 2ab + b^2$. Gli esempj addotti dell' uno e dell'altro caso non solamente si restringono all'equazioni, ove non si passa il secondo grado, ma anche ove essendo noto ciò, che si contiene in una parte, nell'altra si trovi la perfetta o potestà, o radice. In caso contrario si vegga, se la potestà seconda dell'incognita si trova moltiplicata, o divisa per altre quantità, perchè allora si risolverà l'equazione secondo che si è detto poco fà al n. 176. e se la detta potestà fosse negativa, perchè se n'estragga la radice, si farà positiva per mezzo dell'antitesi (n. 175.) Cogli esempj si mette

re in chiaro l'esposto. Sia in 1.° luogo $\frac{aa-xx}{c} = 2a+c$, per risolver questa equazione, essa si moltiplichi per c, e sarà $aa-xx = 2ac + cc$, e aggiungendo alle due parti xx, sarà $aa = 2ac + cc + xx$, e trasferendo si avrà $aa - 2ac + cc = xx$, ed estraendo la radice, sarà $a - c = x$. Sia in 2.° luogo $a + 2xx = b$ dividendo per 2, avrassi $\frac{a}{2} + xx = \frac{b}{2}$ e per antitesi $xx = \frac{b-a}{2}$ ed estratta la radice, $x = \sqrt{\frac{b-a}{2}}$

CLXXVII. In questa guisa nell' equazioni, che contengono una sola incognita, si ha il valor di essa; ma se l' equazione più d'una incognita contenesse, allora purchè tante si formino equazioni, quante v' ha incognite, co' metodi, che siam'ora per dare, otteremo il ridurla alla foggia delle precedenti. Il primo metodo richiede, che assunta qualunque delle formate equazioni, in essa tutte le incognite, eccetto una sola, come cognite si considerino; quindi il valor di quella sola espresso per le cognite insieme, e le incognite, giusta le regole di sopra assegnate, si trovi, e questo valore posto in vece della predetta incognita nelle altre equazioni, farà, che uno di meno sia il numero e delle incognite, e dell' equazioni.

L'istesso facendosi rispetto all'altre incognite successivamente, si perverrà finalmente all'equazione, in cui una sola sarà l'incognita, il valor della quale avrassi per le regole già date. Sieno per es. due equazioni (non passano quì il primo grado) $ax + by = a^2$, $\frac{ay}{c} = b - \frac{fx}{a}$, le quali hanno due incognite, di cui si cerca il valore. Nella prima equazione abbiasi in conto di cognita la y; sarà dunque $x = \frac{a^2 - by}{a}$. Se questo valore sostituiscasi in vece della x nella seconda equazione, si ha l'equazione $\frac{ay}{c} = b - \frac{f}{a} \times \frac{a^2 - by}{a}$, $= b - \frac{fa^2 - bfy}{aa}$ ove una sola è l'incognita, ch'è la y, e la risoluzione di essa per il n.176 dà $y = \frac{bca^2 - fca^2}{a^3 - fcb}$. Ottenuto in questo modo il valore della y, facil cosa è ottenere anche il valor della x, se il valore già trovato si sostituisca nell'equuazione $x = \frac{a^3 - by}{a}$ perchè così si ha $x = a - \frac{b^2 ca + bfca}{a^3 - fcb}$ e ridotti li termini all' istessa denominazione, x =

$\frac{a^4 - b^3 ca}{a^3 - fcb}$, ch' è il valor della x. E ſiccome quì abbiam conſiderato nella prima equazione la y come cognita, così potevamo ſupporre cognita piuttoſto la x, incognita la y, e 'l valor di queſta ſurrogar nella ſeconda equazione; l' iſteſſo ſempre ottenendoſi, comunque l' operazione ſi faccia, come l' eſperienza e la ragione il dimoſtrano.

CLXXVIII. Se tre foſſero le incognite, e tre l' equazioni per eſ. $x + y = b + z$, $y + z = d$, $z + x = c$, perchè ſi abbia il valore di ciaſcheduna delle incognite x, y, z, ſi cerchi nella prima equazione il valor della z, ſuppoſte x, y cognite; ſarà $z = x + y - b$, queſto valore in vece di z ſoſtituito nelle altre equazioni darà $2y + x - b = d$, $2x + y - b = c$; nella ſeconda di queſte due ultime equazioni ſi ponga il valore della x, che dà la prima; e ſi troverà $3y = 2d + b - c$; E così delle altre. Nè ſarà diverſo il metodo, ſebbene più lunga diverrebbe l'operazione nel caſo, che quattro foſſero, o anche più l' equazioni, e le incognite; poichè il metodo aſſegnato è ſenza dubbio univerſale, è a tutti li caſi applicabile, avendo in eſſo la ſoſtituzione il prin-

sipai luogo: ficchè affunta qualunque delle date equazioni, e confiderate le incognite, che vi fono, come cognite, eccetto una fola, il valor di quefta efpreffo per le cognite infieme e per le rimanenti incognite fi foftituifca nell' altre equazioni; e l'ifteffo praticandofi rifpetto alle altre incognite, verrà fempre a diminuirfi il numero di quefte, fino a che fi ottenga l'equazione, in cui fia una fola l'incognita, e 'l valor di effa dalle cognite foltanto venga efpreffo. Quefto modo di oprare chiamafi perciò il *foftituire*, il *furrogare*, e fa, che fvanifcano fucceffivamente le incognite, con furrogarvi il valore di effe. Così in quefte due equazioni $ax+y=b$, $x+by=a$, volendofi fterminata la y, fi trovi il valor di effa nella prima equazione, e farà $b-ax$, quefto foftituito nella feconda equazione in vece della y, che fi trova moltiplicata per b, farà $bb-abx$; onde la feconda equazione diventa $x+bb-abx=a$, in cui non vi ha più la y; e per l'oppofito volendofi fterminata la x, fi prenda il valor di effa nella prima equazione, ch'è $\frac{b-y}{a}$, perchè per antitefi $ax=b-y$, e dividendo per a, $x=\frac{b-y}{a}$: quefto foftituito nella feconda in vece della x fa-

s' avrà $\frac{b-q}{a} + by = a$, ove non è più la x.

CLXXIX. L'altro metodo nientemeno elegante del primo consiste nel cercare in tutte le date equazioni li valori d'una incognita espressi per le cognite insieme e per le rimanenti incognite, e di questi formarne nuove equazioni, nelle quali non vi sarà la detta incognita. Se da queste nuove equazioni si vada rintracciando il valore d'un'altra incognita, questo darà altre equazioni, che già saranno esenti da due incognite; e così di mano in mano sterminando, se fa duopo, le altre incognite, si verrà finalmente a quella equazione, in cui non vi sarà che una sola incognita. Sieno per es. le tre equazioni $x+z+y=b$, $x-z-y=c$, $x+z-y=a$. Da queste si deduca il valore d'una sola per es. x, ed avrassi $x=b-z-y$ dalla prima, $x=c+z+y$ dalla seconda, $x=a-z+y$ dalla terza. Or, perchè queste equazioni esprimono il valore dell'istessa x, potranno da esse formarsi altre tre equazioni, cioè $b-z-y=c+z+y$; $b-z-y=a-z+y$; $c+z+y=a-z+y$, nelle quali manca già l'incognita x; di queste equazioni se ne scelgano due ad arbitrio, perchè due incognite rimangono, e si cerchino in esse i valori d'un'altra incognita per es. della z; or

è chia-

è chiaro, che l'equazione nata da' due valori di z non avrà altra incognita che la y, donde si caverà il valor della medesima, e poi delle altre per le cose già dette. Si deve però avvertire nell'esempio proposto, non potersi dall'equazione $b - z - y = a - z + y$ avere il valore di z, nè il valore della y dall'equazione $c + z + y = a - z + y$; poichè trasferendo i termini, nella prima viene a svanire la z, e si fa noto il valor della y, cioè $y = \frac{b-a}{2}$, e nella seconda svanisce la y, e si determina il valor della z, cioè $z = \frac{a-c}{2}$. Perilche si troverà $x = \frac{b+c}{2}$, sostituendo i valori già noti di y, z, o in alcuna delle date equazioni, o in alcuno de' valori della stessa x, senza che vi sia bisogno di altra equazione. Se vi fossero tante equazioni, quante sono le incognite, ma queste non si contenessero in ciascheduna equazione, allora alquanto più spedita diverrebbe l'operazione, ma il metodo sarebbe lo stesso.

CLXXX. Il terzo metodo altrettanto universale, quanto gli altri, benchè a prima vista nol sembri, è assai in uso presso gli Algebristi. Questo metodo ha luogo nel caso,

che

che due sono le incognite, e due l'equazioni, e in esse i termini, che contengono una stessa incognita sieno identici, e que', che contengono l'una delle due incognite, abbiano gli stessi segni, quelli, che l'altra contengono, i segni contrarj. In questo caso la somma dell'equazioni determinerà la prima incognita, la differenza determinerà la seconda. L'equazioni $ax+by=c^2$, $ax-by=d^2$ hanno le [illegible] oposte condizioni, giacchè sono identici i termini, che contengono ciascheduna incognita, e i segni sono gl'istessi rispetto a' termini, che contengono la x, contrarj rispetto a quelli, che contengono la y. Or essendo la somma delle equazioni $2ax=c^2+d^2$, avremo il valore di $x=\frac{c^2+d^2}{2a}$; ed essendo la differenza delle medesime $2by=c^2-d^2$, avremo il valore della $y=\frac{c^2-d^2}{2b}$. Quindi si deduce, farsi note due quantità subito che si conosce la loro somma, e la lor differenza, il che, come si vedrà, sarà di grandissimo uso nella risoluzion de' problemi.

CLXXXI. Ma se manchi l'identità de' termini, non perciò hassi a stimare non aver luogo l'esposto metodo; poichè si può sempre

pre aver l'identità de' termini rispetto ad una incognita, se per la quantità, che la moltiplica nella seconda equazione, si moltiplichi la prima, e per la quantità, che la moltiplica nella prima, si moltiplichi la seconda equazione. Sieno $ax + by = c^2$, $nx - my = n^2$, in queste niuna delle incognite ha identità di termini; perchè l'abbia una delle due, per es. y, si moltiplichi la prima equazione per m, la seconda per b, e saranno $max + mby = mc^2$, $bnx - mby = bn^2$, in cui sono identici li termini, che contengono y. Ma la somma di esse è $max + bnx = mc^2 + bn^2$; Dunque sarà nota la $x = \frac{mc^2 + bn^2}{ma + bn}$. Che se si voglia nota ancor la y, si trovi coll'istessa regola l'identità de' termini, che contengono la x, col moltiplicare la prima equazione per n, la seconda per a, in guisa che sieno $nax + nby = nc^2$, $nax - amy = an^2$. Dunque essendo la lor differenza $nby + amy = nc^2 - an^2$, sarà nota la $y = \frac{nc^2 - an^2}{nb + am}$.

CLXXXII. Ma se oltre l'identità de' termini, manchi eziandio la condizion richiesta riguardo a' segni, cioè se i termini, che contengono le incognite nell'una e nell'altra equa-

equazione abbiano o gl' istessi, o contrarj li segni, come sarebbe in quest' equazioni $ax + by = c^2$, $nx + mx = n^2$, allora per aversi secondo l' esposto metodo il valor delle incognite, si riducano pel num. precedente i termini all' identità, e poi si faccia non già la somma e la sottrazion dell' equazioni, ma una doppia sottrazione nel caso degli istessi segni, una doppia addizione nel caso de' segni contrarj, e in questa maniera or l' una, or l' altra incognita successivamente sarà sterminata, nel che tutto il fare di tal metodo, è situato.

CLXXXIII. Si stende anche il detto metodo, quando tre sieno, anzi quante si vogliano le incognite, e l' equazioni; benchè tanto più lunga e molesta riesce l' operazione, quante più in numero son le incognite. Metto quì l' es. per altro facile di sole tre: sieno $3x + 2y - z = 7a$, $2x - y + 3z = 5a$, $x + y - z = 2a$. Se alla prima moltiplicata per 3 si aggiunga la seconda, ne viene la quarta equazione $11x + 5y = 26a$, in cui non vi è la z. Se poi dalla prima sottraggasi la terza, resta per quinta equazione $2x + y = 5a$, in cui ne' anche vi è la z, e la soluzione di queste due equazioni si ha pel num. precedente. In tutti questi metodi già si vede, essersi parlato

soltanto dell' equazioni semplici, cioè di primo grado, dell'altre di più alto grado si parlerà nella parte III.

DIGRESSIONE.

Uso dell' Equazioni nella Geometria.

CLXXXIV. La brevità e nettezza, con cui l'Algebra suol dimostrare i problemi, e li teoremi, che geometricamente non si ponno talvolta senza lungo, e stentato raziocinio, egli è un de pregi singolari, che vanta la nostra scienza. Contuttociò per quanto ampio sia l'uso dell'analisi, non si stende però a tutte le verità geometriche, come son quelle, che s' appartengono alle linee o perpendicolari, o parallele, agli angoli, alla congruenza e somiglianza de triangoli, e ad altre siffatte cose, che dalla situazione dipendono delle linee tra loro, non dalla grandezza; laddove il calcolo analitico è calcolo delle grandezze, non della situazione, il qual calcolo, come notò il Leibnitz, non si è ancor trovato nell'algebra de' moderni.

Nel dare quì un saggio dell'uso dell' equazioni nella Geometria, cioè in alcuni

teoremi, che nel secondo degli Elementi Euclide dimostra circa le potenze delle linee rette, altra mira non ho, se non ridurre in pratica l'esposto ne' capi precedenti; poichè dinominate che sieno le linee con le lettere, e giusta le relazioni, che hanno tra se, formate l'equazioni, con ridurle per lo più con la semplice moltiplicazione, si perviene con facilità alla finale equazione.

CLXXXV. Le dimostrazioni de' seguenti teoremi, tutte dipendono da quell'assioma mentovato insiem cogli altri simili al n.168, cioè che non si toglie mai l'eguaglianza, se quantità eguali vengano moltiplicate per eguali quantità, o per un comune moltiplicatore.

§. I. Se sieno due rette linee a, b, e l'una delle due come b si divida in quante si vogliano parti m, n, o si dimostra, che il rettangolo compreso dalle date a, b, è eguale a rettangoli, che dalla indivisa a nelle parti della divisa si formano, cioè $ab = am + an + ao$. Imperochè essendo $b = m + n + o$, è chiaro, che moltiplicando per le dette quantità eguali l'istessa quantità a sarà $ab = am + an + ao$; *Prop.* 1. del II.

§. II. Se una retta linea sia comunque divi-

divisa in due parti, cioè a in c; d, si dimostra, che i due rettangoli di tutta la linea in ciascuna delle sue parti, cioè $ac + ad$ sono eguali al quadrato dell'intiera a, cioè ad aa. Peroche essendo $a = c + d$, moltiplicando l'uno e l'altro membro per a, ne viene $aa = ac + ad$. *Prop.* 2.

§. III. Se una retta a si divida comunque in b, d, il rettangolo dell'intiera in una delle parti, cioè ab e eguale al rettangolo delle parti, insieme col quadrato della predetta parte, cioè a $bd + bb$; mentre se $a = b + d$, moltiplicando i due membri per b, sarà $ab = bb + bd$. *Prop.* 3.

§. IV. Se la retta a sia comunque divisa in c, d, sarà il quadrato dell'intiera eguale a' quadrati delle parti, e a' due rettangoli delle parti stesse, cioè sarà $aa = cc + 2cd + dd$. Nel vero se $a = c + d$, moltiplicando i due membri per se stessi, ne verrà $aa = cc + 2cd + dd$. *Prop.* 4.

§. V. Se una retta si divida in parti eguali, e in parti disuguali, sarà il rettangolo delle parti disuguali, una col quadrato dell' intermedia eguale al quadrato della metà. Imperochè la metà dicasi a, l'intermedia b, sarà $a + b$ la parte maggiore, $a - b$ la mino-

re;

re; ma $\overline{a+b} \times \overline{a-b} = aa - bb$, ch'è il rettangolo delle parti ineguali; dunque aggiuntogli il quadrato della parte intermedia, cioè bb, sarà $aa - bb + bb$, e val quanto dire aa, ch'è lo stesso quadrato della metà a. *Prop.* 5.

Dippiù i quadrati delle dette parti disuguali sono il doppio de' due quadrati della metà, e dell'intermedia; poichè i quadrati delle parti disuguali sono $\overline{a+b}^2$, $\overline{a-b}^2$, cioè $aa + 2ab + bb$, ed $aa - 2ab + bb$, e in conseguenza la loro somma è $2aa + 2bb$; e perciò è il doppio di aa quadrato della metà, e di bb quadrato della intermedia. *Prop.* 9.

§. VI. Se una retta dividasi in parti eguali, e le si aggiunga a diritto un'altra, sarà il rettangolo della data, e dell'aggiunta come di una sola linea, nella parte aggiunta, insieme col quadrato della metà, eguale al quadrato della composta della metà, e della stessa aggiunta. La data retta divisa in parti eguali dicasi $2a$, l'aggiunta c; onde la composta dalle dette è $2a + c$; se questa si moltiplichi per c, sarà $2ac + cc$ il rettangolo di tutta la composta nella parte aggiunta, e giuntogli il quadrato aa della metà, sarà la somma di questo quadrato, e di quel ret-

O tan-

tangolo $aa+2ac+cc$, appunto eguale al quadrato di $a+c$, cioe di a, ch'è la metà e di c, ch'è l'aggiunta; mentre $\overline{a+c}^2 = aa+2ac+cc$. *Prop.6.* Li due quadrati poi dell' intiera composta, e dell'aggiunta sono il doppio de' quadrati della metà, e della composta della metà, e dell'aggiunta; cioè essendo $\overline{2a+c}^2 = 4a^2 + 4ac+c^2$ se a questo quadrato aggiungasi c^2, ch' è il quadrato dell' aggiunta, tal somma $4a^2 + 4ac + 2c^2$ è il doppio di $\overline{a+c}^2$, cioè del quadrato della composta della metà, e dell'aggiunta, e di a^2, ch' è il quadrato della metà, giacchè tal somma è $2a^2 + 2ac + c^2$. *Prop.10.*

§. VII. Divisa una retta comunque nelle parti a, c, saranno i due quadrati, della intiera, cioè $\overline{a+c}^2$, e di una delle due parti, v. g. a^2, eguali al rettangolo due volte preso, formato dall'intiera $a+c$ nella predetta parte a, e al quadrato dell' altra parte c. Perochè $\overline{a+c}^2 = aa+2ac+c^2$, e aggiuntovi a^2, sarà la somma $2aa+2ac+cc$. Ma

$a \times \overline{a+c}$, due volte preſo, $+cc = 2aa + 2ac + cc$. Dunque &c. *Prop.* 7.

§. VIII. Sia la retta x diviſa comunque nelle parti a, c, ſarà il rettangolo dell' intiera in una delle parti, quattro volte preſo, cioè $4xa$, inſieme col quadrato dell'altra parte, ch'è c^2, eguale al quadrato di tutta $a+c$, e della predetta parte a, come di una ſola linea, vale a dire $= \overline{2a+c}^2$. Perochè eſſendo $x = a+c$, ſe l'uno e l'altro membro ſi moltiplichi per $4a$, ne verrà $4ax = 4aa + 4ac$; e giunto ad ambedue cc, ſarà $4ax + cc = 4aa + 4ac + cc$, ch'è il quadrato di $\overline{2a+c}$. *Prop.* 8.

Le rimanenti quattro prop. dell'isteſſo libro II. potrebbero anch'eſſe dimoſtrarſi col calcolo letterale, come quaſi tutte le altre della Geometria elementare, eccetto ſoltanto quelle, di cui ſi è mentovato di ſopra (n. 184.), ma la piena intelligenza di eſſe dipende da altre notizie geometriche aliene dal noſtro iſtituto.

SEZIONE II.

Della Proporzione, e Progressione Arimmetica.

CLXXXVI. LA dottrina delle ragioni, o proporzioni da Euclide nel quinto Elemento per mezzo delle sole Linee spiegata, si andrà in questa, e nella susseguente sezione esponendo generalmente, e col metodo analitico ad ogni sorta di quantità applicando. L'assoluta grandezza delle cose, o quello, che esse sono in se stesse, è a noi naturalmente ignoto; e soltanto sappiamo quanto grandi o quanto piccole sieno, per rapporporto ad altre, con cui si ponno paragonare, e di fatto si paragonano.

CLXXXVII. Questo paragone dissimo (n. 166.) chiamarsi *Ragione*, o *Proporzione*; e poichè il paragone può farsi in ordine al quanto una quantità supera l'altra, o dall'altra è superata, e in ordine al quanto una contiene l'altra, o è contenuta da essa: quindi due sorti di ragioni si distinguono; la prima, per cui si cerca la differenza di due quantità dicesi *Arimmetica*, la seconda, per cui si cerca la contenenza di due quantità, dicesi *Geometrica*. L'una e l'altra viene generalmen-

te

te definita così, la scambievole relazione, che secondo le quantità tra se hanno due grandezze, che sieno dell'istesso genere. Della prima si tratterà al presente, con premettere li seguenti

PROLEGOMENI

Delle cose, che si appartengono all'arimmetica proporzione, e progressione.

CLXXXVIII. Le due quantità omogenee, che tra se si comparano in ordine all'eccesso, o al difetto, diconsi li termini della ragione arimmetica; e in specie *Conseguente* vien detto quello, a cui l'altro, ch'è *l'antecedente*; dice relazione di eccesso o difetto: l'istesso eccesso poi, o difetto, ch'è la differenza de'due termini, si chiama l'esponente della ragione. Così paragonando il sette col tre, 7 è l'antecedente, 3 il consequente, la differenza 4, che indica di quanto il 7 supera il 3, è l'esponente di questa ragione L'esponente dunque della ragione arimmetica si trova per mezzo della sottrazione, ed è il residuo d'una quantità sottratta dall'altra; quindi l'esponente della ragione arimmetica di 7 a 3 è $7 - 3$, di d al b è $d - b$.

CLXXXIX. Siccome due quantità nell'esposta maniera, così anche due ragioni si possono tra se comparare; e allora si dicono eguali, quando eguale è in ambedue l'eccesso, o il difetto, cioè quando eguali hanno gli esponenti. Questa eguaglianza poi si chiama Proporzione, e i quattro termini, che la compongono, diconsi proporzionali in proporzione arimmetica. Sieno i quattro termini 7, 3, 9, 5; è chiaro, che la differenza tra i primi due è eguale alla differenza trà secondi: onde sono proporzionali arimmeticamente, e si esprime la proporzione così 7 è a 3, come 9 a 5, indicandosi essa in questa foggia 7. 3.·. 9. 5, overo 7. 3 = 9. 5, o (come più è in uso) $7 - 3 = 9 - 5$, ove il segno = indica l'eguaglianza degli esponenti, e in consequenza anche delle ragioni. Sicchè se la ragione arimmetica di c a b è eguale alla ragione di d a f, sarà $c - b = d - f$, overo $b - c = f - d$, e perciò se la differenza tra c, e b sia x, sarà anco x la differenza tra d, e f.

CXC. Quando l'eguali differenze in due ragioni tra se paragonate procedono dell'istesso tenore, cioè per mezzo di operazioni fatte coll'istess'ordine, come sarebbe col sotrarre gli antecedenti da' suoi consequenti, o al

con-

contrario, allora le dette ragioni eguali diconsi *direttamente* tali. Così 9 a 7 direttamente come 5 a 3, perchè lo stesso esponente 2 si ha, col sottrarre dagli antecedenti 9, e 5 li conseguenti 7, e 3. Ma quando l'egualtà delle differenze, o sia l'identità dell'esponente si trova per mezzo di operazioni fatte con ordine diverso, cioè col sottrarre di quà l'antecedente dal consequente, di là il consequente dall'antecedente, le ragioni allora, benchè eguali, si dicono *inverse*, ovvero *reciproche*. Così 5 a 3 è inversamente come 7 a 9.

CXCI. La proporzione è *discreta*, quando le due ragioni eguali son formate da quattro termini; si dice poi *continua*, quando son formate da tre termini, ma in guisa, che il secondo termine sia consequente della prima ragione, e antecedente della seconda, e perciò si chiama *mezzo proporzionale*. Tal'è la proporzione di 7, 5. 3, perchè $7-5=5-3$ e si scrive ∴ 7. 5. 3, overo ÷ 7, 5, 3, indicando que' segni ∴, o ÷, che i termini sono continuamente proporzionali. Che se i termini sieno più di quattro in proporzion discreta, o più di tre in proporzion continua, allora formano la *progressione* o discreta, o continua, come sarebbe ∴ *a*. *b*. *c*. *d*. *e* &c,

ch'è una serie di quantità aritmeticamente proporzionali o crescente o decrescente; e se è progression discreta, significa, che $a - b = c - d = e - f$ &c.; se è continua, significa, che $a - b = b - c = c - d$ &c.

CAPO I.

Affezioni della proporzione arimmetica.

CXCII. DAlla cose premesse egli è facile l'inferire, che in ogni ragione arimmetica il consequente adegua sempre il suo antecedente, più, o meno la differenza, onde questa si può esprimere con tal formola, $a . a \pm d$. Imperochè se qualsivoglia quantità a si ponga come antecedente di una qualunque ragione arimmetica, ella deve necessariamente differire dal suo consequente o per più, o per meno: questo più, o meno, cioè l'eccesso, o il difetto è la differenza notata con la d. Dunque se a supera il consequente questo sarà $a - d$, se a è minore del consequente, questo sarà $a + d$. La ragione adunque arimmetica vien generalmente ben espressa, come sopra per $a \pm d$. Quindi è, che la formola della proporzione arimmetica è questa, o altra

tra

ra simile, cioè $a . a \pm d = b . b \pm d$, o se è continua, $a . a \pm d = a \pm d . a \pm 2d$, o più brevemente $\div a . a \pm d . a \pm 2d$; e proseguendosi coll' istesso melodo, si avrà la progressione $\div a . a \pm d . a \pm 2d . a \pm 3d . a \pm 4d$ &c.

TEOREMA I.

CXCIII. IN qualunque proporzione arimmetica la somma degli estremi termini è sempre eguale alla somma di que' di mezzo, e se la proporzione è continua, la somma degli estremi è doppia del mezzo.

Si dimostra. Nella proporzione arimmetica discreta $a . a \pm d = b . b \pm d$, la somma degli estremi è a, e $b \pm d$, la somma de' mezzi è $a \pm d$, e b. Ma è chiaro, la somma di quelli esser la stessa, che la somma di questi. Ciò si verifica anche se i termini sieno diversi, cioè se $a . b = c . d$, sarà $a + d = b + c$, perochè posto, che $a - b = c - d$, se all' una e all' altra parte si aggiunga d, sarà $a - b + d = c$, e trasportando, $a + d = b + c$. Dippiù nella proporzione arimmetica continua $\div a . a \pm d . a \pm 2d$, la somma degli estremi è $2a \pm 2d$ doppia certamente del mezzo $a \pm d$; o se detta proporzione venga espres-

espressa con termini diversi, cioè $\div a . b . c$, essendo $a - b = b - c$, sarà trasportando $a + c = 2b$, come doveva dimostrarsi.

TEOREMA II.

CXCIV. SE, essendo quattro li termini, la somma degli estremi è eguale alla somma de' mezzi, saranno quelli arimmeticamente proporzionali. E se essendo tre termini, la somma degli estremi è doppia del mezzo, la proporzion di essi sarà arimmetica continua. Imperochè essendo ne' quattro termini a, b, c, d, per l'ipotesi, $a + d = b + c$, sarà trasportando $a - b = c - d$. Ed essendo ne' tre a, b, c anche per l'ipotesi $a + c = 2b$, sarà trasportando $a - b = b - c$. Dunque $a . b \therefore c . d$, e $\div a . b . c$.

CXCV. *Corollario* I. Dati tre termini si può trovare il quarto arimmeticamente proporzionale. Sieno i dati a, b, c, e 'l quarto da trovarsi x. Essendo per l'ipotesi $a . b \therefore c . x$, sarà per il teor. $a + x = b + c$, quindi per antitesi $x = b + c - a$. La regola dunque generale per rinvenirlo è questa: Si prenda la somma de' mezzi, da essa si sottragga il primo, e 'l resto sarà il quarto cercato; mentre

tre questo dev'essere eguale alla differenza tra la somma de' mezzi, e 'l primo termine.

CXCVI. *Corollario* II. Dati due, si trova il terzo arimmeticamente proporzionale; poichè essendo $\div a . b . x$, sarà per il teor. II. $a + x = 2b$ e trasportando, $x = 2b - a$, qual formola è la regola generale, cioè il terzo cercato è eguale alla differenza tra il doppio del mezzo, cioè del secondo dato e 'l primo.

CXCVII. *Corollario* III. Dati due, si trova il mezzo proporzionale. Sieno $\div a . x . b$, sarà $a + b = 2x$, e dividendo per 2, sarà $x = \frac{a+b}{2}$, qual formola dimostra, che il mezzo proporzionale è eguale alla metà della somma de' dati.

CXCVIII. *Corollario* IV. Dati che sieno due mezzi di quattro continuamente proporzionali, come a, b, si troverà agevolmente il primo che chiamo x; poichè se si faccia $x . a \div a . b$, sarà per il teor. $x + b = 2a$, e conseguentemente $x = 2a - b$. Nell'istessa maniera si troverà anche il quarto, che chiamo y, poichè si faccia $a . b \div b . y$, sarà $a + y = 2b$, e in conseguenza $y = 2b - a$. Sono adunque $2a - b$, a, b, $2b - a$ li quattro termini in proporzione continua arimmetica.

CXCIX.

CXCIX. *Corollario* V. Quattro termini arimmeticamente proporzionali, rimangon tali, comunque sieno collocati, purche gli estremi restino estremi, o ambidue divengano mezzi; perochè se $a . b \therefore c . d$, anche $d . c \therefore b . a$; $b . a \therefore d . c$; e $c . d \therefore a . b$ &c.

CC. Or perchè si vegga la pratica delle affezioni spiegate, soggiungo quì due Esempj di quesiti, che si posson fare per trovare i termini arimmeticamente proporzionali.

Es. I. Quattro mercatanti debbono tra se dividersi 160 scudi in maniera, che il primo ne abbia 20, il quarto 60. Si cerca la parte del secondo, e quella del terzo, supponendo, dover essere le quattro parti in proporzione arimmetica. Si chiamino i dati 20, e 60 a, e b; i quesiti x, y. Sarà per la condizion del problema $a . x \therefore y . b$, e pel teor. I. $x + y = a + b$, onde $y = a + b - x$. Or è chiaro, che essendosi spiegata la condizione del problema, questo rimane ancora indeterminato, perchè il valore di qualunque delle due incognite sempre si ha per le note insieme e per l'altra incognita. Pertanto si può in vece dell' incognita x assumere a libito un qualunque numero, purchè sia minor della somma $a + b = 20 + 60 = 80$, acciò il valor della y venga

ga positivo. Posto adunque $x = 2$, sarà $y = 20 + 60 - 2 = 78$, e le quattro porzioni saranno 20 . 2 .·. 78 . 60 arimmeticamente proporzionali, e la differenza è 18, la somma 160. Similmente, se si ponga $x = 10$, sarà $y = 20 + 60 - 10 = 70$, e le quattro porzioni 20 . 10 .·. 70 . 60, la somma delle quali è 160, e la differenza 10, e così nelle altre supposizioni, che si possono fare tra gli stessi limiti. Che se le quattro porzioni si volessero in proporzione arimmetica crescente, allora il valore arbitrario della x dovrebb' essere minor della somma $a + b = 80$, per ragion dell' equazione $y = a + b - x$, maggiore però della quantità $a = 20$; onde deve determinarsi tra questi limiti 20, e 80. Così posto $x = 25$, si troverà 20 . 25 .·. 55 . 60, e posto $x = 30$, si troverà 20 . 30 .·. 50 . 60. &c.

Es. II. Un Padre di famiglia in morendo fece un legato di scudi 6200 da distribuirsi a quattro suoi figliuoli, con tal patto, che il primogenito avesse 2500, il resto si distribuisse agli altri tre in modo, che le quattro parti fossero arimmeticamente proporzionali. La porzion del primo = 2500 dicasi a, quella del secondo x, del terzo z, del quarto y: Sarà per la condizion del problema $a . x .·. z . y$, e in con-

consequenza $a + y = x + z$. Dovendo pertanto le dette due somme far la somma totale $= 6200$, sarà ciascuna di esse eguale alla metà di 6200, e consequentemente $a+y=3100$, e $y = 3100 - a$, $= 3100 - 2500 = 600$, ch'è la porzion del quarto, che come già nota, si dica c. Affin di trovare le due rimanenti, si consideri l'equazione $x + z = a + y = a + c$, e si deduca $x = a + c - z$; ma con ciò la questione è indeterminata; onde si assuma in vece di z un qualunque numero, purchè minore di $a + c = 3100$, e sia $z=2000$; si troverà in tal supposto $x=1100$; Onde le quattro porzioni in proporzione aritmmetica sono 2500, 1100, 2000, 600, la somma de'quali numeri è 6200, la differenza 1400; e il simile si avrà nelle altre supposizioni. Ma se per condizion del problema si volesse, che le quattro parti fossero in proporzione aritmmetica decrescente, in tal caso si prenda il valore arbitrario della x nell'equazione $z=a+c-x$, il qual valore non solo debb'essere minore della somma $a + b$, ma eziandio della quantità $a = 2500$; e dippiù il valore della z, che deve trovarsi, ha da essere minore della x, maggiore della c; il che fa, che il valore della x sia maggiore della metà di $a + c = 3100$. Si ponga pertanto

tanto $x = 2000$; sarà $z = 3100 - 2000 = 1100$. Di fatto essendo 1100 minore della $x = 2000$, maggiore della $c = 600$, si verificano le condizioni del problema, e le quattro porzioni 2500, 2000, 1100, 600 sono in proporzione arimmetica decrescente con la somma $= 6200$, e la differenza $= 500$.

CAPO II.

Affezioni della progressione arimmetica.

CCI. **U**NA serie di quantità crescenti, o decrescenti secondo una stessa differenza, si chiama Progressione arimmetica, la quale se è crescente, si può esprimere in questa forma $\div a . a + d . a + 2d . a + 3d . a + 4d$ &c; se è decrescente in quest' altra $\div a . a - d . a - 2d . a - 3d . a - 4d$ &c. Onde generalmente espressa, si riduce a questa $\div a . a \pm d . a \pm 2d . a \pm 3d$ &c. Può anche cominciar dal zero, o crescendo, $\div 0 . a . 2a . 3a . 4a$ &c., o decrescendo, $\div 0 . - a . - 2a . - 3a . - 4a$. E in tal forma è la più semplice, come notò il Vallis nel c. 21. dell' Algebra, ed è la più adattata alla natura delle potestà, come si è detto nella Sezion III. della parte I., e all' uso de' logaritmi, come si dirà nel capo ulti-

mo

mo. E non solo può cominciar dal zero, ma può averlo anche, qualunque ella sia la progressione, come uno de suoi termini, perchè tra o, e qualsivoglia termine si dà sempre la differenza al detto termine eguale Sarà per es. una progressione numerica decrescente continuata in questa guisa ... 16. 12. 8. 4. 0. — 4. — 8. — 12 &c.

TEOREMA III.

CCII. **I**N ogni progressione arimmetica così crescente, come decrescente la somma degli estremi è sempre eguale alla somma de' due di mezzo, o de' due qualunque sieno egualmente distanti da quelli, o al doppio del mezzo, se il numero de' termini è dispari.

Espongasi analiticamente l' una e l' altra progressione, $a. a \pm d. a \pm 2d. a \pm 3d. a \pm 4d. a \pm 5d$ $a \pm 6d$. La somma del primo, e dell' ultimo termine $= 2a \pm 6d$ la somma del secondo, e del penultimo, com' anche del terzo, e del quinto $= 2a \pm 6d$. Così il doppio del mezzo, o sia del quarto termine $a \pm 3d = 2a \pm 6d$.

CCIII. *Corollario* I. Qualsivoglia termine della progressione arimmetica crescente contiene il primo, cioè il minimo, e tante volte la

la comune differenza, quanti sono i termini dopo il primo sino a quello, che si cerca. Quindi si ha il massimo, o l'ultimo termine, se la differenza si moltiplichi per il numemero de' termini, meno uno, e al prodotto si aggiunga il minimo. L'un e l'altro si rende manifesto per la sola espressione analitica, mentre il quarto termine per es. $a + 3d$ contiene il minimo a, e tre volte la differenza, perchè tre sono i termini dal secondo al quarto; e 'l massimo termine $a + 5d$ è il prodotto della differenza nel numero de' termini, che si pongono sei, meno uno, cui si aggiunge il minimo a. E se il num. de' termini si dica n, esso meno l'unità sarà $n - 1$, e perciò la differenza moltiplicata in $n - 1$, sarà $nd - d$, e giuntovi il primo termine, sarà $a + nd - d$ il massimo.

CCIV. *Corollario* II. Nella progressione arimmetica qualsivoglia termine è la metà della somma di due altri egualmente da esso distanti. Così il termine quarto $a \pm 3d$ è la metà della somma del terzo, e del quinto termine, cioè di $a \pm 2d$, e di $a \pm 4d$, similmente del secondo, e del sesto, di $a \pm d$, e di $a \pm 5d$.

TEOREMA IV.

CCV. IN ogni progressione arimmetica crescente, se il primo termine si tolga dall'ultimo, e 'l residuo dividasi per il numero de' termini, meno uno, il quotiente sarà la differenza.

Imperochè pel num. 203 il massimo termine, o sia l'ultimo è $a + nd - d$. Se dunque da questo si tolga il primo a, e 'l residuo $nd - d$ si divida per $n - 1$, il quotiente d è la differenza cercata.

TEOREMA V.

CCVI. NEll'arimmetica progressione crescente, se il primo termine si tolga dall'ultimo, e 'l residuo si divida per la differenza, il quotiente sarà il num.de' termini meno uno. Imperochè se dall' ultimo termine $= a + nd - d$ si tolga il primo a, e'l residuo $nd - d$ si divida per la differenza d, il quotiente è $n - 1$, cioè il numero de termini, meno uno: Onde aggiunto 1, sarà n il numero de termini.

TEO-

TEOREMA VI.

CCVII. LA somma di tutta l'arimmetica progressione si ha, se il prodotto della somma degli estremi nel numero de termini dividasi per 2.

Due sono i casi; il primo, quando il numero de' termini è pari, per es. nella progressione 3, 5, 7, 9, 11, 13. Pel teor. I. le somme di 3 + 13, di 5 + 11, di 7 + 9 sono tra se eguali: Ma queste tre somme insieme fanno la somma di tutta la progressione, com'è chiaro. Dunque se una di esse, cioè la somma degli estremi si prenda tre volte (ch'è l'istesso che moltiplicata per sei, ch' è il num de termini, si divida per 2) darà la somma di tutta la progressione. Il secondo caso è, quando il numero de' termini è dispari, come 3, 5, 7, 9, 11. La somma degli estremi, 3 + 11, com'anche l'eguale di 5 + 9, ciascuna è, per la seconda parte del teor. I. doppia del mezzo, ch'è 7. Dunque se 3 + 11 si prenda due volte e mezzo, o, ch'è lo stesso, se moltiplicata per cinque, ch' è il numero de termini si divida per 2, darà la somma della progressione. L'istesso si ottiene, se ad evitar la frazione il termine di

 mez-

mezzo, ch'è ſempre la metà della ſomma degli eſtremi, ſi moltiplichi per il numero de'termini; mentre $7 \times 5 = 3 + 11 \times 2 \frac{1}{2}$.

Nel caſo poi, che la progreſſione comincia da zero (n. 201.) ad averſi la ſomma di tutta la prograſſione, il ſolo ultimo termine ſi ha da moltiplicare per la metà del numero de' dati termini.

CCVIII. *Corollario* I. Date la ſomma della progreſſione, e la ſomma deli Eſtremi, ſi dà anche il numero de' termini: poichè dividendo la prima per la ſeconda, il quotiente è la metà del numero de' termini. E al contrario date la ſomma della progreſſione, e 'l numero de' termini, ſi dà la ſomma degli eſtremi; perchè dalla diviſione della ſomma della progreſſione per la metà del numero de' termini ne viene per quotiente la ſomma degli eſtremi.

CCIX. *Corollario* II. Date la ſomma della progreſſione, la ſomma degli eſtremi, e dippiù il primo termine, ſi ha la differenza; poichè ſe . primo termine due volte tolgaſi dalla ſomma degli eſtremi, il reſiduo è la differenza moltiplicata nel numèro de' termini, meno uno.

CCX.

CCX. *Corollario universale*. Cinque cose in qualunque arimmetica progressione possono considerarsi, vale a dire il primo termine, il numero de' termini, la differenza, e la somma di tutta la progressione. Sicchè se il primo termine si dica a, l'ultimo y, il numero de termini n, la differenza d; la somma della progressione s, s'avrà analiticamente I. $y = a + d\overline{n-1}$ (n. 203); II. $d = \frac{y-a}{n-1}$ (n. 205.) III. $n - 1 = \frac{y-a}{d}$ (n. 206.) IV. $\frac{na+ny}{2} = s$ (207.) E quindi comparando l'equazioni trovate, e variandole giusta le regole delle riduzioni date nella Sezion I., si possono i valori delle cose sudette aversi in altre maniere; come a cagion d'esempio, ripigliando l'ultima equazione $\frac{na+ny}{2} = s$, s'avrà moltiplicando per 2, $na + ny = 2s$; e trasportando, $ny = 2s - na$; e dividendo, $y = \frac{2s-na}{n}$ ed $a = \frac{2s-ny}{n}$.

Chi poi volesse adattar le cose esposte alla progression decrescente, basta, che cangi due termini, cioè il primo in ultimo, e l'ultimo in primo in guisa, che ciò, che si è detto del primo, lo applichi all'ultimo, e al contrario.

 DI-

CXCIX. *Corollario V.* Quattro termini arimmeticamente proporzionali, rimangon tali, comunque sieno collocati, purche gli estremi restino estremi, o ambidue divengano mezzi; perochè se $a . b .\because c . d$, anche $d . c .\because b . a$; $b . a .\because d . c$; e $c . d .\because a . b$ &c.

CC. Or perchè si vegga la pratica delle affezioni spiegate, soggiungo quì due Esempj di quesiti, che si posson fare per trovare i termini arimmeticamente proporzionali.

Es. I. Quattro mercatanti debbono tra se dividersi 160 scudi in maniera, che il primo ne abbia 20, il quarto 60. Si cerca la parte del secondo, e quella del terzo, supponendo, dover essere le quattro parti in proporzione arimmetica. Si chiamino i dati 20, e 60 a, e b; i quesiti x, y. Sarà per la condizion del problema $a . x .\because y . b$, e pel teor. I. $x + y = a + b$, onde $y = a + b - x$. Or è chiaro, che essendosi spiegata la condizione del problema, questo rimane ancora indeterminato, perchè il valore di qualunque delle due incognite sempre si ha per le note insieme e per l'altra incognita. Pertanto si può in vece dell' incognita x assumere a libito un qualunque numero, purchè sia minor della somma $a+b = 20 + 60 = 80$, acciò il valor della y venga

ga positivo. Posto adunque $x = 2$, sarà $y = 20 + 60 - 2 = 78$, e le quattro porzioni saranno 20 . 2 ∴ 78 . 60 arimmeticamente proporzionali, e la differenza è 18, la somma 160. Similmente, se si ponga $x=10$, sarà $y=20+60-10=70$, e le quattro porzioni 20 . 10 ∴ 70 . 60, la somma delle quali è 160, e la differenza 10, e così nelle altre supposizioni, che si possono fare tra gli stessi limiti. Che se le quattro porzioni si volessero in proporzione arimmetica crescente, allora il valore arbitrario della x dovrebb' essere minor della somma $a + b = 80$, per ragion dell' equazione $y = a + b - x$, maggiore però della quantità $a = 20$; onde deve determinarsi tra questi limiti 20, e 80. Così posto $x = 25$, si troverà 20 . 25 ∴ 55 . 60, e posto $x = 30$, si troverà 20 . 30 ∴ 50 . 60. &c.

Es. II. Un Padre di famiglia in morendo fece un legato di scudi 6200 da distribuirsi a quattro suoi figliuoli, con tal patto, che il primogenito avesse 2500, il resto si distribuisse agli altri tre in modo, che le quattro parti fossero arimmeticamente proporzionali. La porzion del primo = 2500 dicasi a, quella del secondo x, del terzo z, del quarto y: Sarà per la condizion del problema $a . x ∴ z . y$, e in con-

conſequenza $a+y=x+z$. Dovendo pertanto le dette due ſomme far la ſomma totale $=6200$, ſarà ciaſcuna di eſſe eguale alla metà di 6200, e conſequentemente $a+y=3100$, e $y=3100-a$, $=3100-2500=600$, ch'è la porzion del quarto, che come già nota, ſi dica c. Affin di trovare le due rimanenti, ſi conſideri l'equazione $x+z=a+y$ $=a+c$, e ſi deduca $x=a+c-z$; ma con ciò la queſtione è indeterminata; onde ſi aſſuma in vece di z un qualunque numero, purchè minore di $a+c=3100$, e ſia $z=2000$; ſi troverà in tal ſuppoſto $x=1100$; Onde le quattro porzioni in proporzione arimmetica ſono 2500, 1100, 2000, 600, la ſomma de'quali numeri è 6200, la differenza 1400; e il ſimile ſi avrà nelle altre ſuppoſizioni. Ma ſe per condizion del problema ſi voleſſe, che le quattro parti foſſero in proporzione arimmetica decreſcente, in tal caſo ſi prenda il valore arbitrario della x nell'equazione $z=a+c-x$, il qual valore non ſolo debb'eſſere minore della ſomma $a+b$, ma eziandio della quantità $a=2500$; e dippiù il valore della z, che deve trovarſi, ha da eſſere minore della x, maggiore della c; il che fa, che il valore della x ſia maggiore della metà di $a+c=3100$. Si ponga pertanto

tanto $x = 2000$; farà $z = 3100 - 2000 = 1100$. Di fatto essendo 1100 minore della $x = 2000$, maggiore della $c = 600$, si verificano le condizioni del problema, e le quattro porzioni 2500, 2000, 1100, 600 sono in proporzione arimmetica decrescente con la somma $= 6200$, e la differenza $= 500$.

CAPO II.

Affezioni della progressione arimmetica.

CCI. UNA serie di quantità crescenti, o decrescenti secondo una stessa differenza, si chiama Progressione arimmetica, la quale se è crescente, si può esprimere in questa forma $\therefore a . a + d . a + 2d . a + 3d . a + 4d$ &c; se è decrescente in quest' altra $\therefore a . a - d . a - 2d . a - 3d . a - 4d$ &c. Onde generalmente espressa, si riduce a questa $\therefore a . a \pm d . a \pm 2d . a \pm 3d$ &c. Può anche cominciar dal zero, o crescendo, $\therefore 0 . a . 2a . 3a . 4a$ &c., o decrescendo, $\therefore 0 . - a . - 2a . - 3a . - 4a$. E in tal forma è la più semplice, come notò il Vallis nel c. 21. dell' Algebra, ed è la più adattata alla natura delle potestà, come si è detto nella Sezion III. della parte I., e all' uso de' logaritmi, come si dirà nel capo ulti-

mo

mo. E non solo può cominciar dal zero, ma può averlo anche, qualunque ella sia la progressione, come uno de suoi termini, perchè tra o, e qualsivoglia termine si dà sempre la differenza al detto termine eguale Sarà per es. una progressione numerica decrescente continuata in questa guisa ..16. 12. 8. 4. 0. — 4. — 8. — 12 &c.

TEOREMA III.

CCII. In ogni progressione arimmetica così crescente, come decrescente la somma degli estremi è sempre eguale alla somma de' due di mezzo, o de' due qualunque sieno egualmente distanti da quelli, o al doppio del mezzo, se il numero de' termini è dispari.

Espongasi analiticamente l'una e l'altra progressione, $a.a \pm d.\ a \pm 2d.\ a \pm 3d.\ a \pm 4d.\ a \pm 5d$ $a \pm 6d$. La somma del primo, e dell'ultimo termine $= 2a \pm 6d$ la somma del secondo, e del penultimo, com'anche del terzo, e del quinto $= 2a \pm 6d$. Così il doppio del mezzo, o sia del quarto termine $a \pm 3d = 2a \pm 6d$.

CCIII. *Corollario* I. Qualsivoglia termine della progressione arimmetica crescente contiene il primo, cioè il minimo, e tante volte

la

la comune differenza, quanti sono i termini dopo il primo sino a quello, che si cerca. Quindi si ha il massimo, o l'ultimo termine, se la differenza si moltiplichi per il numemero de' termini, meno uno, e al prodotto si aggiunga il minimo. L'un e l'altro si rende manifesto per la sola espressione analitica, mentre il quarto termine per es. $a + 3d$ contiene il minimo a, e tre volte la differenza, perchè tre sono i termini dal secondo al quarto; e 'l massimo termine $a + 5d$ è il prodotto della differenza nel numero de' termini, che si pongono sei, meno uno, cui si aggiunge il minimo a. E se il num. de' termini si dica n, esso meno l'unità sarà $n - 1$, e perciò la differenza moltiplicata in $n - 1$, sarà $nd - d$, e giuntovi il primo termine, sarà $a + nd - d$ il massimo.

CCIV. *Corollario* II. Nella progressione aritmetica qualsivoglia termine è la metà della somma di due altri egualmente da esso distanti. Così il termine quarto $a \pm 3d$ è la metà della somma del terzo, e del quinto termine, cioè di $a \pm 2d$, e di $a \pm 4d$, similmente del secondo, e del sesto, di $a \pm d$, e di $a \pm 5d$.

TEOREMA IV.

CCV. IN ogni progressione arimmetica crescente, se il primo termine si tolga dall'ultimo, e 'l residuo dividasi per il numero de' termini, meno uno, il quotiente sarà la differenza.

Imperochè pel num. 203 il massimo termine, o sia l'ultimo è $a + nd - d$. Se dunque da questo si tolga il primo a, e 'l residuo $nd - d$ si divida per $n - 1$, il quotiente d è la differenza cercata.

TEOREMA V.

CCVI. NEll' arimmetica progressione crescente, se il primo termine si tolga dall' ultimo, e 'l residuo si divida per la differenza, il quotiente sarà il num. de' termini meno uno. Imperochè se dall' ultimo termine $= a + nd - d$ si tolga il primo a, e 'l residuo $nd - d$ si divida per la differenza d, il quotiente è $n - 1$, cioè il numero de termini, meno uno: Onde aggiunto 1, sarà n il numero de termini.

TEO-

TEOREMA VI.

CCVII. La somma di tutta l'arimmetica progressione si ha, se il prodotto della somma degli estremi nel numero de termini dividasi per 2.

Due sono i casi; il primo, quando il numero de' termini è pari, per es. nella progressione 3, 5, 7, 9, 11, 13. Pel teor. I. le somme di 3 + 13, di 5 + 11, di 7 + 9 sono tra se eguali: Ma queste tre somme insieme fanno la somma di tutta la progressione, com'è chiaro. Dunque se una di esse, cioè la somma degli estremi si prenda tre volte (ch'è l'istesso che moltiplicata per sei, ch'è il num de termini, si divida per 2) darà la somma di tutta la progressione. Il secondo caso è, quando il numero de' termini è dispari, come 3, 5, 7, 9, 11. La somma degli estremi, 3 + 11, com'anche l'eguale di 5 + 9, ciascuna è, per la seconda parte del teor. I. doppia del mezzo, ch'è 7. Dunque se 3 + 11 si prenda due volte e mezzo, o, ch'è lo stesso, se moltiplicata per cinque, ch'è il numero de termini si divida per 2, darà la somma della progressione. L'istesso si ottiene, se ad evitar la frazione il termine di

CCX. *Corollario universale.* Cinque cose in qualunque arimmetica progressione possono considerarsi, vale a dire il primo termine, il numero de' termini, la differenza, e la somma di tutta la progressione. Sicchè se il primo termine si dica a, l'ultimo y, il numero de termini n, la differenza d; la somma della progressione s, s'avrà analiticamente I. $y = a + d\overline{n-1}$ (n. 203); II. $d = \frac{y-a}{n-1}$ (n. 205.) III. $n - 1 = \frac{y-a}{d}$ (n.206.) IV. $\frac{na+n\overline{a}}{2} = s$ (207.) E quindi comparando l'equazioni trovate, e variandole giusta le regole delle riduzioni date nella Sezion I., si possono i valori delle cose sudette aversi in altre maniere; come a cagion d'esempio, ripigliando l'ultima equazione $\frac{na+ny}{2} = s$, s'avrà moltiplicando per 2, $na + ny = 2s$; e trasportando, $ny = 2s - na$; e dividendo, $y = \frac{2s-na}{n}$ ed $a = \frac{2s-ny}{n}$.

Chi poi volesse adattar le cose esposte alla progression decrescente, basta, che cangi due termini, cioè il primo in ultimo, e l'ultimo in primo in guisa, che ciò, che si è detto del primo, lo applichi all'ultimo, e al contrario.

Applicazione dell'espoſte affezioni alle coſe fiſiche.

CCXI. LA diſceſa de' corpi gravi ſecondo la teoria del Galilei comprende quaſi tutt'i caſi della progreſſione arimmetica; per la riſoluzione de' quali propongo a' principianti per loro eſercizio alcuni problemi, applicabili anche in generale a tutte le altre coſe ſimili. Si sà, aver dimoſtrato il Galilei, che gli ſpazj fatti da un corpo nella libera ſua diſceſa con moto uniformemente accelerato, creſcono in tempi eguali ſecondo la ſerie arimmetica de' numeri diſpari 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13 &c. Sia pertanto il

PROBLEMA I.

CCXII. UN Corpo liberamente cadendo fa nel primo tempo (che ſi ſupponga un minuto ſecondo) 3 canne, nel ſecondo 5, nel terzo 7, e così in avanti coll' iſteſſo accreſcimento di moto uniformemente accelerato. Si cerca, quante canne farà nel decimo ſecondo?

L' iſteſſo generalmente propoſto. Dati

nell'

nell' arimmetica progressione il primo termine, la comune differenza, e'l numero de' termini, investigar l'ultimo termine, o altro qualunque della progressione.

Il quesito si risolverà pel n. 203. e 204.

PROBLEMA II.

CCXIII. Poste le cose dianzi dette, si cerca dippiù, quante canne avrà fatte, o farà nel decorso di diece secondi. Overo più generalmente: Dati il primo termine, la differenza, e 'l numero de' termini, rinvenire la somma della progressione.

Si trovi pel n. 203. anche il massimo, e poi pel n. 207. s' avrà la somma cercata.

PROBLEMA III.

CCXIV. Poste le cose precedenti si cerca, dopo quanti minuti farà 15. canne. Overo più generalmente: Dati il primo termine, la differenza, e l' ultimo termine, ritrovare il numero de' termini, o ancor la somma della progressione.

Sia il primo termine $3 = a$, l' ultimo $15 = b$, la differenza $2 = d$, il numero de'

 ter-

termini $=x$, la ſomma della progreſſione $=y$. Sarà pertanto (pel n. 203.) $b=a+dx-d$, e (pel n.207.) $y=\frac{ax+bx}{2}$. Si cerchi il valore di x nella prima equazione (n. 177.) ſarà $x=\frac{b+d-a}{d}$. Soſtituiſcaſi queſto valore nella ſeconda equazione, ſarà $y=(\frac{b+d-a}{2d})\times(b+a)=\frac{b^2+bd+ad-a^2}{2d}=\frac{b+a}{2}+\frac{b^2-a^2}{2d}$. Si ſurroghino finalmente alle lettere i determinati valori di eſſe &c.

PROBLEMA IV.

CCXV. SE il grave cadendo abbia fatte 3 canne nel primo ſecondo, e 21 canne nel decimo: ſi cerca quindi la comune differenza. Overo generalmente: Dati nella progreſſione il primo, e l'ultimo termine, com' anco il numero de' termini, trovar la differenza, e dippiù la ſomma della progreſſione.

La differenza ſi troverà pel num. 205, e la ſomma pel num. 207.

PRO.

PROBLEMA V.

CCXVI. SE tutto lo spazio percorso sia di 120 canne in 10 minuti secon-
li con l' uniforme accrescimento di canne 2
n ogni secondo, si cerca, qual sia lo spazio
atto nel primo minuto secondo, o nell' ul-
imo? Più generalmente: Dati nell' arimme-
ica progressione la differenza, il numero de
ermini, e la somma della progressione, ri-
rovare il termine primo, e anche l'ultimo.

Sia il numero de termini $10 = n$, la
ifferenza $2 = d$, la somma $120 = a$; il pri-
no termine $= x$, l' ultimo $= y$. Sarà dun-
ue pel num. 203. $y = x + nd - d$, e pel
um. 207, $a = \frac{xn + yn}{2}$. Si cerchi il valore del-
a y in questa seconda equazione, e si troverà
$= \frac{2a}{n} - x = x + nd - d$ per la prima equa-
ione; e finalmente per riduzione $x = \frac{a}{n} +$
$\frac{d}{2} - \frac{dn}{2}$ &c. E così in somiglianti quesiti da
re dati si passa per le regole analitiche a
rovare il rimanente, com' è da vedersi ne'
guenti problemi di altre materie diverse da
uelle de precedenti.

PRO.

termini $= x$, la somma della progressione $= y$. Sarà pertanto (pel n. 203.) $b = a + dx - d$, e (pel n.207.) $y = \frac{ax+bx}{2}$. Si cerchi il valore di x nella prima equazione (n. 177.) sarà $x = \frac{b+d-a}{d}$. Sostituiscasi questo valore nella seconda equazione, sarà $y = (\frac{b+d-a}{2d}) \times (b+a) = \frac{b^2 + bd + ad - a^2}{2d} = \frac{b+a}{2} + \frac{b^2 - a^2}{2d}$. Si surroghino finalmente alle lettere i determinati valori di esse &c.

PROBLEMA IV.

CCXV. SE il grave cadendo abbia fatte 3 canne nel primo secondo, e 21 canne nel decimo: si cerca quindi la comune differenza. Overo generalmente: Dati nella progressione il primo, e l'ultimo termine, com' anco il numero de' termini, trovar la differenza, e dippiù la somma della progressione.

La differenza si troverà pel num. 205, e la somma pel num. 207.

PRO-

PROBLEMA VI.

CCXVI. Se tutto lo ſpazio percorſo ſia di 120 canne in 10 minuti ſecondi con l' uniforme accreſcimento di canne 2 in ogni ſecondo, ſi cerca, qual ſia lo ſpazio fatto nel primo minuto ſecondo, o nell' ultimo? Più generalmente: Dati nell' arimmetica progreſſione la differenza, il numero de termini, e la ſomma della progreſſione, ritrovare il termine primo, e anche l'ultimo.

Sia il numero de termini $10 = n$, la differenza $2 = d$, la ſomma $120 = a$; il primo termine $= x$, l' ultimo $= y$. Sarà dunque pel num. 203. $y = x + nd - d$, e pel num. 207, $a = \frac{xn + yn}{2}$. Si cerchi il valore della y in queſta ſeconda equazione, e ſi troverà $y = \frac{2a}{n} - x = x + nd - d$ per la prima equazione; e finalmente per riduzione $x = \frac{a}{n} + \frac{d}{2} - \frac{dn}{2}$ &c. E così in ſomiglianti queſiti da tre dati ſi paſſa per le regole analitiche a trovare il rimanente, com' è da vederſi ne' ſeguenti problemi di altre materie diverſe da quelle de precedenti.

PRO-

PROBLEMA VI.

CCXVII. UN' artefice nel primo giorno del suo lavoro ha guadagnato bajocchi 2, e ne' dì susseguenti altrettanto, che nel giorno precedente coll' accrescimento sempre di 3 altri bajocchi: la somma di tutto il guadagno è stata di 57. ba:, si cerca il numero de' giorni impiegati al lavoro. Overo, rendendosi generale il problema, sieno dati il primo termine $2 = a$, la differenza $3 = d$, la somma della progressione $57 = c$; bisogna trovare il numero de termini $= x$, e l'ultimo termine $= y$.

Pel n.203. $y = a + dx - d$, e pel n.207 $c = \frac{ax + yx}{2}$. Si trovi il valore d'y in questa seconda equazione, la quale per riduzione si cambierà in questa $\frac{2c - ax}{x} = y$; quindi per l'eguaglianza de' valori della stessa y, s'avrà l'equazione finale $\frac{2c}{d} = x^2 + \frac{2a - d}{d}$. E per abbreviare i termini, si faccia $\frac{2a - d}{d} = m$ sarà $\frac{2c}{d} = x^2 + mx$. Si aggiunga all' uno e all' altro membro $\frac{1}{4} m^2$, sarà $\frac{2c}{d} + \frac{1}{4} m^2 = x^2 + mx + \frac{1}{4}$

m^2;

m^2; e $\sqrt{\frac{1}{4}m^2 + \frac{2c}{d}} = x + \frac{1}{2}m$; $\sqrt{\frac{1}{4}m^2 + \frac{2c}{d}} - \frac{1}{2}m = x$. Si sostituiscano alle lettere i valori di esse già determinati; ed essendo $a = 2$, $d = 3$, $c = 57$, sarà $m \left(= \frac{2a-d}{d}\right) = \frac{4-3}{3} = \frac{1}{3}$

e perciò $x = \sqrt{\frac{1}{36} + \frac{114}{3}} - \frac{1}{6}$, $= \frac{37}{6} - \frac{1}{6} = \frac{36}{6}$ $= 6$; e $y = 2 + 18 - 3 = 2 + 15 = 17$.

TEOREMA VII.

CCXVIII. IN una serie arimmetica di numeri dispari, come 1, 3, 5, 7 &c. la somma di tutta la progressione è la potestà seconda della somma del num. de' termini.

Si dimostra. Sia il primo termine $1 = a$; la differenza $2 = d$, il numero de' termini $= n$: Dico $n^2 =$ alla somma di tutta la progressione. Imperochè pel n.203. l'ultimo termine è $a + nd - d$, e la somma del primo, e dell' ultimo termine è $2a + nd - d$; e in consequenza la somma di tutta la progressione

sarà pel n.207. $\frac{1}{2}n \times \overline{2a + nd - d}$; cioè, perchè

per

per l'ipotesi $a=1$, e $d=2$, sarà la somma di tutta la progressione $n+n^2-n=n^2$, come dovea dimostrarsi.

CCXIX. *Corollario*. Dal continuo aggiungimento de' numeri dispari in serie arimmetica ne vengono i numeri quadrati, cioè a dire

Da' numeri dispari $1+3+5+7+9+11+13+15+17+19$

I numeri quadrati $1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100$.

Quindi le differenze de' numeri quadrati sono numeri dispari in progressione arimmetica.

PROBLEMA VII.

CCXX. Rinvenire un numero di termini nella serie de' dispari, da sommarsi con tal legge, che la somma di tutta la progressione formi la potenza data di un numero dato.

Sia il primo termine della serie $=1$, la differenza de' termini $=2$, il numero dato $=n$, la potestà di esso $=n^m$, il numero cercato secondo la condizion del problema sia x. Pel n. 218. la somma di tutta la progressione sarà x^2, e per la condizion del probl.

$x^2 = n^m$, e perciò $x = \sqrt[2]{n^m}$, overo (n. 95.) $x = n^{\frac{m}{2}}$. Or posta tal finale equazione costa, la risoluzion del problema non esser possibile, se non in que' casi, in cui l'esponente m è numero pari, sicchè possa dividersi per 2. Mi spiego coll'esempio: Sia $m = 2$; Sarà $x^2 = n^m = n^2$, e $x = n^{\frac{2}{2}} = n$, cioè il numero cercato de' termini da sommarsi eguale alla radice quadrata della data potestà n^m. Sia l'esponente $m = 4$, sarà $x^2 = n^m = n^4$, e $x = n^{\frac{4}{2}} = n^2$, cioè il numero cercato de' termini da sommarsi è il numero quadrato della radice n della data potestà n^4. Onde se $n = 2$, $m = 4$, sarà $x^2 = n^m = 2^4$, e $x = n^{\frac{m}{2}} = 2^2 = 4$. Dunque il numero cercato de termini è 4; quindi $1 + 3 + 5 + 7 = 16 = x^2 = n^m = 2^4$.

PROBLEMA VIII.

CCXXI. Rinvenire una serie arimmetica di numeri dispari tanti in numero, quante unità contiene un numero dato, e la

e la somma di essi formi la potestà data dell' istesso dato numero.

Sia il numero dato $= n$, la potestà di esso n^m, il primo termine della serie x. Poichè il numero de' termini per ipotesi è n, e la differenza nella serie de' dispari è a cagion d' es. $= 2$, l' ultimo termine della richiesta serie sarà $x + 2 \times \overline{n-1} = x + 2n - 2$, e la somma del primo e dell'ultimo termine $2x + 2n - 2$, qual somma moltiplicata per $\frac{1}{2} n$, dà pel n. 207. la somma di tutta la progressione, ch'è $nx + n^2 - n$, $= n^m$ per la condizion del problema, e dividendo l'una e l'altra parte per n, sarà $x + n - 1 = \frac{n^m}{n}$, cioè (n. 93.) $= n^{m-1}$; e sottraendo dall'una e l'altra parte $n - 1$, sarà $x = n^{m-1} - n + 1$.

Dalla finale equazione costa, essere il problema in ogni caso possibile; com'è da vedersi cogli esempj: I. Sia l'esponente della data potestà $m = 3$, sarà $x = n^{3-1} - n + 1$. Se dunque si ponga $n = 2$, sarà $x = 2^2 - 2 + 1 = 3$; e perciò $n^m = 2^3 = 8 = 3 + 5$, ch'è la somma della progressione. E se $n = 3$, sarà $x = 7$, e perciò $n^m = 3^3 = 27 = 7+9+11$.

II. Sia

II. Sia l'esponente $m = 4$: sarà $x = n^{4-1} - n + 1$. Se dunque $n = 2$, sarà $x = 8 - 1 = 7$; e perciò $n^m = 2^4 = 16 = 7 + 9$. E se $n = 3$, sarà $x = 27 - 2 = 25$; e perciò $n^m = 3^4 = 81 = 25 + 27 + 29$, ch'è la somma della progressione.

CCXXII. *Corollario*. Quindi si deduce, che non solo i numeri quadrati, ma anche i cubici, li quadrato-quadrati, e d'ogni altra superior potenza si formano coll'aggiungimento de' numeri dispari.

SEZION III.

Della Proporzione, e Progression Geometrica.

CCXXIII. Dopo d'avere nella precedente Sezione spiegato tutto ciò, che s'appartiene alla Proporzione, e Progressione arimmetica, non solo per mezzo di linee, e di numeri, ma anche di simboli; coll' istesso metodo passo ora alla Geometrica, rendendo così la dottrina più universale di quella, che da Euclide trattasi nel V. e VI. elemento. Si darà ancora diffusamente la regola del trè con altre regole, che da essa dipendono. Ma prima d'ogni altro, premetto al solito li

PRO-

PROLEGOMENI

Delle cose appartenenti alla Proporzione, e Progressione Geometrica.

CCXXIV. La ſcambievole relazione, che due quantità omogenee ſecondo la quantità hanno tra ſe, diſſimo (n. 188.) chiamarſi Ragione, o Proporzione; e ſe detta relazione, o ſia comparazione ſi fa in ordine al quanto una quantità contiene l'altra, diſſimo ivi ſteſſo, chiamarſi *Ragione Geometrica*. E ſiccome l'arimmetica, ch'è in ordine all'eccesso, o difetto, ſi trova per mezzo della ſottrazione, per cui la differenza ne diventa l'eſponente (n. 189.) Così la Geometrica, ch'è in ordine alla contenenza, ſi ha per mezzo della diviſione, e 'l quotiente, che moſtra quante volte una quantità contiene l'altra, n'è *l'eſponente*. appunto perchè eſpone la ragion del diviſibile al diviſore. Di fatto la ragion geometrica di 6 a 2 ſi trova con dividere 6 per 2, e 'l quotiente 3 dinota, che il 2 tre volte nel 6 contienſi; e la ragion geometrica di b a c è $\frac{b}{c}$.

CCXXV. Quindi il quotiente del termi-

ne

ne antecedente diviso per il conseguente, cioè l'esponente della ragion geometrica, si chiama anche il *Denominator* della ragione, perchè denomina la specie della ragione, vale a dire, e che essendo il denominatore 2, la ragione si dice doppia, essendo 3, 4 &c, si dice tripla, quadrupla; e se è $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ &c, si dice ragion suddupla, suttripla &c., e generalmente la ragione di *a* a *b*, che si dinomina per $\frac{a}{b}$ può essere una quantità intiera, o una frazione, che determina il modo, con cui l'antecedente della ragione contiene il conseguente, o è da questo contenuto. Le specie diverse delle ragioni per riguardo agli esponenti si trovano aver presso gli antichi i suoi nomi particolari; ed oltre i già riferiti di ragion dupla, tripla, o al contrario suddupla, suttripla &c (in cui l'esponente o è numero intiero, o è qualche parte aliquota) vi son degli altri; e quando l'esponente è 1 con qualche parte aliquota, cioè 1 $\frac{1}{2}$, 1 $\frac{1}{3}$, 1 $\frac{1}{4}$ &c, si chiama la ragione in genere *sopraparticolare*, in specie *sesquialtera*, *sesquiterza*, *sesquiquarta*; e al contrario *sussopraparticolare*, cioè *sussesquialtera*, *sussesquiterza* &c; quando l'esponente è

1 con più parti aliquote, cioè $1\frac{2}{3}$, $1\frac{2}{4}$ &c. si chiama in genere *soprapartiente*, in specie *soprabipartiente le terze* &c. e le contrarie a queste *sossoprapartienti*; quando l'esponente è un numero con qualche parte aliquota, la ragione si dice *moltiplice sopraparticolare*, come $2\frac{1}{2}$ *doppia sesquialtera*, $3\frac{1}{3}$ *tripla sesquiterza*, e al contrario; finalmente quando l'esponente è un numero con più parti aliquote, si dice *moltiplice soprapartiente*, come $2\frac{2}{3}$, $3\frac{4}{5}$ doppia soprabipartiente le terze, tripla sopraquadripartiente le quinte &c, e al contrario. Ora però questi vocaboli son disusati presso i moderni, che sogliono piuttosto esprimere ogni qualunque ragione per i suoi termini, amando meglio di dire per es., che la circonferenza è al diametro, come 22 a 7, o come 223 a 71, che dire in ragion tripla sesquisettima, o in ragion tripla sopradecupartiente le settuagesime prime.

CCXXVI. Dall'esser l'esponente della ragion geometrica il quotiente della division fatta dell'un termine per l'altro, ne viene, che l'esponente stesso sia all'unità, come l'antecedente al consequente; siccome nella divisione il

il quotiente è all' unità , come il dividendo al divisore . Non deve pertanto confondersi l' esponente d' una ragione cogli *esponenti d'una stessa ragione* . Questi sono i minimi termini esprimenti la stessa data ragione ; Così gli esponenti per es. della ragion di 36 a 9 sono 4, e 1 ; e si trovano nella stessa maniera, per cui una frazione si riduce a' minimi suoi termini, acciò che il valore, senza variarsi, meglio, e in un' attimo si conosca.

CCXXVII. Si divide la ragione in *ragion d' eguaglianza* , di cui a lungo s' è parlato nella prima sez. di questa parte , e in *ragion d'ineguaglianza* , in cui li termini sono ineguali, e se l' antecedente è maggior del consequente , si dice ragione di *maggiore ineguaglianza* , se al contrario è minor del consequente , ragione di *minore ineguaglianza* , ed ha i proprj vocaboli usati specialmente dagli antichi (n. 225.) Si divide in secondo luogo in ragion *razionale* , e *irrazionale* . La prima è quella , che può esprimersi con veri numeri , e l'hanno tutte le quantità dette *Commensurabili* , cioè che hanno una qualche misura comune . L'altra è, che esprimer non si può co' numeri veri, o intieri sieno , o rotti , e si trova tra le quantità *Incommensurabili* , tra le quali non vi

ha una comune misura. E sebbene tali quantità sogliono esprimersi per mezzo di numeri sordi; non essendo però questi veri numeri, ma piuttosto simboli d'immaginarj numeri, perciò quella ragione che si esprime per mezzo di questi numeri, o simboli, si dice quasi con un solecismo *lògos alògos* ragione irrazionale, cioè, come interpreta il VVallis c. 19. *dell' Alg*, ragione piuttosto ineffabile, o inesplicabile con veri numeri. Tal è dalla Geometria nel quadrato la ragion del lato alla diagonale, ch'è come 1 a $\sqrt{2}$; perchè $\sqrt{2}$ è simbolo d'un numero, che moltiplicato in se stesso produrrebbe il numero 2, quando tal numero così moltiplicato non si può trovare ne' trà gli intieri, nè trà i rotti.

CCXXVIII. Siccome due quantità omogenee in ordine alla contenenza, così in ordine alla stessa due ragioni si possono tra se paragonare; E siccome dal quoziente la ragion gometrica, così dall'eguaglianza de' quozienti si determina l'eguaglianza di siffatte ragioni. Eguali adunque, simili, identiche si dicono le ragioni, quando i loro esponenti sono eguali, e allora la doppia relazione si chiama con proprio vocabolo *Proporzione*, e i termini si dicono *proporzionali*. Quest'eguaglianza

za di ragioni non deve confonderſi con la ragion d'eguaglianza, di cui ſi è parlato nella Sez. I., e che eſige i termini eguali: laddove l'eguaglianza delle ragioni, come ſi è detto, eſige eguali i quotienti. Le ragioni adunque di a a c, e di b a d ſi dicono eguali, o ſimili, quando i conſequenti c, d, o le loro parti aliquote ſimili, egual numero di volte ſi contengono ne' loro antecedenti a, b. Poſti in proporzione i termini, il primo, e l'ultimo ſi dicono gli eſtremi, il ſecondo, e 'l terzo i mezzi: in due maniere ſuol notarſi, cioè $a : c :: b : d$, e vuol dire, che a è a c, come b a d, overo $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$, dove ſi eſprime la proporzione per i quotienti eguali. Così ſe $\frac{8}{2} = \frac{12}{3}$, $8 : 2 :: 12 : 3$.

CCXXIX. Per l'oppoſito ineguali ſon le ragioni, quando i loro eſponenti non ſono eguali, overo quando i conſequenti, o le aliquote ſimili de' conſequenti non ſi contengono egual numero di volte ne' ſuoi antecedenti; e quella diraſſi ragion maggiore riſpetto all' altra, l'antecedente di cui contiene più volte il ſuo conſeguente, o la parte aliquota di eſſo. L'ineguaglianza poi delle ragioni coll'

istessi segni vien notata, che l' ineguaglianza delle quantità; quindi $\frac{a}{c} > \frac{b}{d}$, overo $a:c > b:d$, significa, esser la ragione di a a c maggiore della ragione di b a d; e al contrario $\frac{b}{d} < \frac{a}{c}$, la ragione di b a d minore della ragione di a a c. Nell' istessa maniera $\frac{12}{3} < \frac{6}{2}$, e $\frac{3}{9} > \frac{2}{8}$.

CCXXX. L' eguaglianza dunque degli esponenti, o de' quotienti si può assumere come definizione della proporzion geometrica, ed è l' indizio più sicuro delle ragioni eguali, overo delle quantità proporzionali; siccome al contrario l' ineguaglianza degli esponenti l'indizio delle ragioni ineguali; e ciò non solo nelle razionali, ma anche nelle irrazionali, nelle quali benchè l' esponente non possa essere un numero vèro (come nell' es. di sopra addotto l' esponente della ragione, che ha il lato del quadrato alla diagonale, espresso per la frazione $\frac{1}{\sqrt{2}}$) dinota però per mezzo di tal numero sordo una ragione alla vera infinitamente prossima.

CCXXXI. Dall' esser l' esponente della ragione di due termini un quotiente della divisio-

visione dell' antecedente pel conseguente, ne siegue, che il termine maggiore sarà eguale al minore moltiplicato per l' esponente, e 'l minore eguale al maggiore per l'esponente diviso. Perilchè se de' termini d'una data ragione a, b, l'a sia minore, e l'esponente sia m, sarà il maggiore $b = am$, e 'l minore $a = \frac{b}{m}$. Quindi in vece di a, b, possono sostituirsi i loro valori $\frac{b}{m}$, am, ed esprimersi la ragione $a : b$ in tal forma $\frac{b}{m} : am$; ed essendo quattro termini proporzionali $a : b :: c : d$, può la detta proporzione meglio notarsi per l'esponente comune $a : am :: c : cm$; anzi data qualunque progression geometrica, cioè in cui li termini sono continuamente proporzionali, $::$ a, b, c, d, e &c, saranno i suoi termini più semplicemente espressi per l' esponente comune m, in tal forma $:: a$, am^1, am^2, am^3 &c.

CCXXXII. Evvi anche un terzo modo di esprimere analiticamente la ragione di due quantità, e l' eguaglianza di due ragioni per mezzo dell' aliquote simili, come si è accennato nel num. 228. Imperochè qualunque quantità può concepirsi divisa in qualsivoglia numero comunque grande di parti eguali, che

diconsi aliquote. Or abbiasi ad esprimere la ragione $a:b$, e disegni n il num. delle aliquote x, che a contiene, parimente m il num. delle stesse contenute da b, sarà $a=nx$, e $b=mx$, e perciò $a:b=nx:mx$. Sieno inoltre due altre quantità c, d, l'aliquota loro comune sia y, n disegni il num. di tali aliquote contenute in c, m il num. delle medesime contenute in d; sicchè $c=ny$, $d=my$, e sarà $c:d=ny:my$. Supponendosi adunque $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, si esprimerà tal proporzione così $\frac{nx}{mx}=\frac{ny}{my}$, in cui l'esponente è $\frac{n}{m}$, e se $n=5$, $m=3$, e x significhi piedi, y tese, sarà $\frac{5\ piedi}{3\ piedi}=\frac{5\ tese}{3\ tese}$; si dicono poi simili le aliquote x, y qualora egualmente misurano i tutti, di cui esse sono le aliquote. Quindi se nella ragione $\frac{a}{a}=\frac{nx}{mx}$, il numero qualunque n, e m sia finito e determinato, questa ragione $\frac{a}{b}$ sarà commensurabile, e razionale; ma se poi le quantità a, b sieno in modo comparate, che quantunque la b si concepisca divisa in qualunque numero m d'aliquote x, finito però e determinato, mai non può farsi, che l'altra quantità a contenga esattamente un numero

pari

parimente finito *a* d'aliquote *x*, senza che vi resti sempre un qualche residuo, allora le due quantità *a*, *b* si diranno incommensurabili. Decrescendo però all'infinito il residuo, col crescere all'infinito il numero delle aliquote, sino a divenire un nulla, ne siegue, che se il conseguente *b* concepiscasi diviso in un numero infinito di parti eguali *x*, anche l'antecedente *a* ne contenga un numero parimente infinito; onde *n*, *m* dinotano in tal caso un numero infinito.

CCXXXIII. Essendo continuamente proporzionali in proporzion geometrica le quantità, espresse col previo segno della proporzione, per es.: : *a*, *b*, *c*, *d*, *e* &c. la prima *a* dicesi aver la ragion *duplicata* alla terza *c*, *triplicata* alla quarta *d*, *quadruplicata* alla quinta, e così in avanti: cioè duplicata, triplicata &c. della ragione di *a* alla *b*; e significa, che tra l'*a*, e la *c* vi sono due ragioni eguali, tra l'*a*, e la *d* tre ragioni eguali &c. Quindi la ragion duplicata di *a* a *c* si chiama anche la ragion del quadrato di *a* alla sua radice, e la triplicata la ragion cubica, cioè del cubo *a* alla sua radice; perchè realmente la ragion del quadrato alla sua radice è una ragion composta di due ragioni egua-

li,

li, e la cubica è composta di tre ragioni eguali.

CCXXXIV. Che se le quantità non sieno proporzionali, può anch'esservi tra esse una ragion composta, sebbene non di ragioni eguali. Questa, che con proprio vocabolo chiamasi ragion *Composta*, si hà, quando l'esponente di lei è il prodotto degli esponenti delle ragioni semplici componenti. Sieno per es. a, b, c, d, &c. e sia $a : b :: 8 : 4$, $c : d :: 6 : 2$; Già è chiaro, le due ragioni di $a : b$, e di $c : d$ non essere eguali, perchè l'esponente della prima è 2, della seconda è 3; ma 2×3 dà 6. Or se si faccia il 6 esponente d'un'altra ragione, questa sarà la composta delle due date. Facciasi adunque $m : x :: 6 : 1$, e sarà $m : x$ in ragion composta di $a : b$, e di $c : d$, cioè di $8 : 4$, e di $6 : 2$. Si trovi pertanto tra m, e x un'altra quantità n, a cui la m abbia la prima delle due date ragioni, cioè la dupla, e la stessa n alla terza x la seconda delle date ragioni, cioè la tripla; Se dunque $m = 18$, sarà $n = 9$, mentre $18 : 9 :: 8 : 4$, e x sarà $= 3$, mentre $9 : 3 : 6 : 2$. Dunque $m : x$ in ragion composta di $m : n$, e di $n : x$, cioè per l'ipotesi di $a : b$, e di $c : d$, e l'esponente di $m : x$, cioè di $18 : 3$ è il $6 = 2 \times 3$, cioè eguale

guale al prodotto degli esponenti delle ragioni componenti.

CCXXXV. Conoscendosi l'eguaglianza delle ragioni per mezzo dell'eguaglianza de' quotienti, se i quotienti eguali provengano da operazioni fatte all'istesso modo, cioe con dividersi ciascun'antecedente pel suo consequente, o al contrario, allora le ragioni eguali si dicono *Dirette*; ma se l'un quotiente proviene dalla division dell'antecedente per il consequente, l'altro al contrario dalla divisione del consequente per l'antecedente, in tal caso le ragioni si dicono *Inverse*, o *Reciproche*. Cosi li numeri 12, e 3 sono in ragion inversa de numeri 2, e 8, benchè sieno proporzionali, perchè sebbene hanno l'esponente comune 4, questo però nella prima ragione proviene dalla divisione dell' antecedente 12 pel consequente 3, e nella seconda dalla divisione del consequente 8 per l'antecedente 2. Quindi una quantità qualunque dicesi esser *direttamente* come un'altra, quando all'istesso modo, che questa, anche quella o cresce, o manca. Così nel negoziare si dice il frutto esser direttamente come il capitale, perchè se scudi 5 fanno il frutto di 100 scudi, 200 scudi renderanno scudi 10; e se si computi

puti anche il tempo del negozio, sarà il frutto in ragion diretta composta e del fondo capitale, e del tempo impiegato, com' è da se chiaro. Ma se all' istessa misura, con cui una quantità cresce, l' altra decresce, o al contrario; allora l'una è in ragione inversa dell' altra. Così nella costruzion d' un' edificio gli operai sono in ragion' inversa del tempo, che vi s'impiega, perchè a perfezionar l'opera, tanto meno di tempo ricercasi, quanto più in numero sono gli operai.

Del detto finora si vede chiaro ciò, che che nel calcolo de' rotti si osservò, cioè potersi nelle ragioni, o ne' loro esponenti adoperare le stesse operazioni arimmetiche, che si adoperano nelle frazioni; non essendo altro le ragioni geometriche, se non frazioni ora proprie, ora improprie.

CAPO I.

Affezioni della proporzion geometrica.

CCXXXVI. DAlle cose premesse ne' num. specialmente 231, e 232 si ricava, poterfi ogni qualunque ragion geometrica esprimere con questa formola $a : am$, che indi-

indica, il consequente d' ogni ragion geometrica essere eguale al prodotto dell'antecedente nel quoziente. Perilchè se l' antecedente è maggiore del consequente, il quoziente sarà una frazion propria, cioè minore dell' unità; se l'antecedente è minor del consequente, il quoziente sarà un numero, cioè maggiore dell' unità. Per es. nella ragione di 12 : 4 espressa per $a : am$, m sarà $= \frac{1}{3}$, onde essendo $a = 12$, am, ch' è il consequente sarà $= 12 \times \frac{1}{3} = 4$; nella ragione poi di 4 : 12 espressa eziandio per $a : am$, m sarà $= 3$, ed essendo $a = 4$, il consequente am sarà $= 4 \times 3 = 12$. E poichè l' eguaglianza delle ragioni geometriche è l' istessa eguaglianza de' quozienti, quindi è, che la formola $a : am :: b : bm$ esprime qualunque geometrica proporzione.

LEMMA

CCXXXVII. Se una quantità, per es. il numero 2 sia moltiplicatore, o divisore di due altre quantità, o di due altri numeri 4, 12, per una parte i prodotti 8, 24, per l' altra i quozienti $\frac{4}{2}$, e $\frac{12}{2}$ rimangono proporzionali a nume-

numeri moltiplicati, o divisi. Imperochè esprimasi la ragione di 4 : 12 per $a : am$, sarà $2a : 2am :: a : am$, ed $\frac{a}{2} : \frac{am}{2} :: a : am$, e ciò per l' eguaglianza degli esponenti (n. 230.)

TEOREMA I.

CCXXXVIII. Nella proporzion geometrica il prodotto degli estremi è eguale al prodotto de' mezzi termini: E se tai prodotti sono eguali, i quattro termini sono geometricamente proporzionali.

Si dimostra la prima parte; perochè se $a : b :: c : d$, sarà $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ (n.228); quindi moltiplicando per bd, sarà per lo lemma $ad = bc$. Essendo poi $ad = bc$, dividendo l' una e l'altra parte per bd, sarà $\frac{ad}{bd} = \frac{bc}{bd}$, cioè $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$; e in conseguenza $a : b :: c : d$, come doveasi dimostrare.

TEOREMA II.

CCXXXIX. Se la proporzion geometrica è continua, il prodotto degli estremi è sempre eguale al quadrato del termino di mezzo. E all' opposito &c.

Si

Si deduce dal precedente; poichè se sieno $::a, b, c$, sarà $a:b::b:c$, e perciò $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$; se dunque quest' eguali quantità si moltiplichino per bc, diverrà il prodotto $ac =$ al prodotto bb. Ed essendo $ac = bb$, dividendo per bc, sarà $\frac{ac}{bc} = \frac{bb}{bc}$, cioè $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$, e in conseguenza $::a, b, c$, com'era da dimostrarsi.

CCXL. *Corollario*. Quindi deriva il metodo di risolvere qualsivoglia equazione in analogia, o proporzione; il che è di grandissimo uso in tutta l'analisi. E in vero, se di due prodotti eguali, cioè $ad = bc$, i due fattori a, d si prendano come estremi, mentre gli altri due b, c si prendono come mezzi, o al contrario quelli presi come estremi, questi si prendano come mezzi, già l'equazione si cangia in proporzione, e i detti fattori presi, come si è detto, rimangono proporzionali. E per meglio vedere le permutazioni, che possono avere i termini proporzionali, sia il

TEOREMA III.

CCXLI. In ogni proporzion geometrica $::a, b, c, d$, i termini rimangono sem-

pre

pre proporzionali, comunque si dispongano, cioè o che gli estremi restino estremi, o che ambidue diventino mezzi.

La ragione si è perchè nella detta varia disposizion di termini, sempre si verifica, che il prodotto degli estremi è eguale al prodotto de' mezzi; e perciò in vigor del Teor.I. i termini rimangono sempre proporzionali; com' è da vedersi nell' apposta tavola, ove nella prima colonna vi sono le otto permutazioni, che possono avere li termini proporzionali giusta il teorema, e nell' altra si vede sempre il prodotto degli estremi eguale al prodotto de' mezzi.

$a:b::c:d$	$ad = bc$
$d:b::c:a$	$ad = bc$
$a:c::b:d$	$ad = bc$
$d:c::b:a$	$ad = bc$
$b:a::d:c$	$bc = ad$
$b:d::a:c$	$bc = ad$
$c:a::d:b$	$bc = ad$
$c:d::a:b$	$bc = ad$

Queste permutazioni porgono a Geometri varii modi d'argomentare, che formano la maggior parte delle proposizioni dell' Elemento V. di Euclide, e possono inferirsi dall' espo-

ſto teorema; onde quì gli ſoggiungo come Corollari.

CCXLII. *Corollario* I. Eſſendo $:: a, b, c, d$, anche *alternando* rimarranno proporzionali, cioè $a : c :: b : d$. Quindi è anche, che le parti ſimili, per eſ. a, b ſieno direttamente come i ſuoi tutti A, B; poichè eſſendo per l'ipoteſi $a : A :: b : B$, ſarà alternando $a : b :: A : B$. La ragione dell'uno e dell'altro è, perchè anche così alternando il prodotto degli eſtremi è eguale al prodotto de' mezzi.

CCXLIII. *Corollario* II. Eſſendo $:: a, b, c, d$, anche *invertendo* rimarranno proporzionali, cioè $b : a :: d : c$; perchè o ſieno a, d li termini eſtremi, e i mezzi b, c; o queſti ſieno gli eſtremi, e quelli i mezzi, ſempre ſi verifica $ad = bc$, e perciò ſempre ſono proporzionali pel teor. II.

CCXLIV. *Corollario* III. Eſſendo $:: a, b, c, d$, anche *componendo* ſaranno proporzionali, cioè $a + b : b :: c + d : d$. Ed eſſendo $:: a + b, b, c + d, d$, ſarà *dividendo* $a : b :: c : d$. La ragion della prima parte ſi è, perchè eſſendo $a : b :: c : d$, ſarà $ad = bc$, e perciò anche $ad + bd = bc + bd$, e vai quanto dire $\overline{a + b} \times d$,

ch' è il prodotto degli estremi, $=\overline{c+d}\times b$, ch' e il prodotto de' mezzi: Onde pel teor. II. $a+b:b::c+d:d$. La ragion della seconda parte, perche essendo per l'ipotesi $a+b:b::c+d:d$ sarà $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$ (n. 228), e in consequenza $\frac{a}{b}+1=\frac{c}{d}+1$; quindi tolta dall'una e dall'altra parte l' unità, sarà $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, cioè $a:b::c:d$.

CCXLV. All' esposto corollario posson riferirsi due altre sorti di Composizione, e di Division di ragione. La prima dicesi *Composizione conversa*, ed è quando ciascun' antecedente insieme col suo consequente, come unico termine si paragona coll' antecedente medesimo, cioè se $a:b::c:d$, sarà per la composizion conversa $a+b:a::c+d:c$. L'altra dicesi *Composizion contraria*, ed è, quando l' antecedente si riferisce all'antecedente insieme e al consequente, come a un solo termine, cioè $a:a+b::c:c+d$. Dell'istessa maniera si ha la *Division conversa*, quando il consequente minore si riferisce all' eccesso, di che l' antecedente lo supera, cioè se $a:b::c:d$, sarà per la division conversa $b:a-b::d:c-d$.

Si

Si ha anche la *Divifion contraria*, quando l'antecedente minore fi riferifce all'eccesso, di che il confequente lo fupera, cioè effendo $a:b::c:d$, farà per tal divifione $a:b-a::c:d-c$. Cofta l'una e l'altra dalle cofe dette.

CCXLVI. *Corollario* IV. Se, come il tutto è al tutto, così la parte tolta alla parte to a; farà anche il rimanente al rimanente, come il tutto al tutto. Sieno i tutti a, b, le loro parti fimili c, d, e in confequenza $a:b::c,d$; fe da' tutti fe ne tolgano le parti, faranno le rimanenti, cioè $a-c:b-d::a:b$. Perochè per l'ipotefi $ad=bc$; onde anche $\overline{a-c}\times b=\overline{b-d}\times a$, cioè $ab-bc=ab-ad$. Dunque $a-c:b-d$, come $a:b$.

CCXLVII. *Corollario* V. Se fieno le quantità A, B, C &c da una parte, e dall'altra altre pari numero a, b, c &c, e fieno prefe a due a due proporzionali, cioè $A:B::a:b$, e $B:C::b:c$ &c, farà anche per la ragione, che dicefi *egualmente ordinata*, la prima A all'ultima C, come la prima a all'ultima c dell'altra ferie. Poiche effendo per l'ipotefi $\frac{A}{B}=\frac{a}{b}$ farà alternando $\frac{A}{a}=\frac{B}{b}$; Similmente effendo $\frac{B}{c}=\frac{b}{c}$, farà $\frac{B}{b}=\frac{C}{c}$ Or fe $\frac{A}{a}=\frac{B}{b}=\frac{C}{c}$, farà $\frac{A}{a}=\frac{C}{c}$

$\frac{C}{c}$ e consequentemente $\frac{A}{C} = \frac{a}{c}$. Gli esposti modi di variar la proporzione il VVallis *to. 2. dell' alg. c. 19.* gli riduce a più pochi, cioè in breve così. Essendo un' antecedente al suo conseguente, come l'altro antecedente al suo conseguente, sarà anche similmente la somma, o la differenza degli antecedenti alla somma o alla differenza de' conseguenti, e ciò alternamente, o inversamente. Parimente sarà la somma degli antecedenti alla differenza di essi, come la somma de' conseguenti alla lor differenza; e ciò ancora alternamente, e inversamente.

CAPO II.

Della regola di Proporzione.

CCXLVIII. IL metodo di cavare da tre dati il quarto termine proporzionale si chiama la regola di proporzione, volgarmente detta *la regola del trè* a riguardo de' tre dati, e per l' uso insigne, che ha non solo nella matematica, ma anche nella vita civile detta eziandio *la regola aurea*. Il quarto però incognito, da trovarsi per mezzo della regola, o è tale, che ad esso il ter-

zo

zo dica la stessa ragione, che il primo dice al secondo, e allora la regola da usarsi per trovarlo si chiama *diretta*; se è poi tale, che esso debba avere al secondo quella stessa ragione, che il primo ha al terzo, e allora si trova per la regola, che si chiama *inversa*. Dippiù ambedue queste regole ponno esser *Composte*, se più di tre, cioè cinque, o sette sieno i termini dati. Vengo pertanto ad esporre in primo luogo

La regola di proporzione diretta semplice.

CCXLIX. L'uso, e la dimostrazion della regola dipende dal teor. I. del c. preced., da cui si ha, che essendo proporzionali quattro termini, $a:b::c:x$, il prodotto degli estremi è eguale al prodotto de mezzi, $ax=bc$; e dividendo gli eguali per a, ne verrà $x=\frac{bc}{a}$. Eccone l'uso.

PROBLEMA I.

CCL. DI quattro termini proporzionali, dati che sieno tre, a, b, c rinvenire il quarto incognito x.

Risoluzione. Il terzo termine si moltiplichi pel secondo, e 'l prodotto si divida pel

primo: il quotiente sarà il quarto termine cercato: Quindi $x = \frac{bc}{a}$. Debbonsi però i dati termini disporre in guisa, che quello, che ha annesso il quesito, si metta nel terzo luogo, l'omogeneo al terzo in primo luogo, e in secondo quello, ch'è omogeneo al quesito. Gli esempj dichiareranno la risoluzion del problema, e l'uso della regola.

Es. I. Due canne di panno costano sc. 7, quanti ne costeranno canne 16 dell'istesso panno? I tre termini dati sono 2, 7, 16; e perchè 16 ha annesso il quesito, si mette in terzo luogo, il num. 2 omogeneo al 16 in primo luogo, il num. 7 omogeneo al quesito in secondo luogo così: $2 : 7 :: 16 : x$. Dunque $x = \frac{16 \times 7}{2} = \frac{112}{2} = 56$; cioè $2 : 7 :: 16 : 56$.

Es. II. Quanto costano tre libre di seta, se cinquanta libre si son comprate per 25 scudi? Il quesito vien proposto con ordine inverso, perchè le 3 libre, cui corrisponde il termine cercato, si trova in primo luogo, dovendo anzi occupare il terzo; e però i termini disposti secondo la regola, sono $50 : 25 :: 3 : \frac{75}{50} = 1\frac{15}{50}$, cioè uno sc. e tre decime.

Es. III. Se alcun volesse misurar l'altezza

za d'una torre per mezzo dell'ombra, che dietro a se getta, la troverà per mezzo della regola del tre. Eretto nell'istesso piano della torre, o in un piano parallelo un bastone di nota lunghezza, per es. di piedi 6, l'ombra del quale sia di piedi 2, nell'istesso mentre, che l'ombra della torre sia misurata di piedi 20: si dica, se l'ombra = 2 mi dà l'altezza del bastone = 6, l'ombra = 20 quant' altezza mi darà per la torre? fatta l'operazione si troverà $2:6::20:\frac{120}{2}=60$.

CCLI. Può darsi il caso, che i termini omologi proposti nella questione non sieno dell' istessa denominazione; e allora debbono all' istessa denominazione ridursi, prima di venire alla pratica della regola, com'è da vedersi negli Es., che soggiungo.

Es. IV. Il moto proprio delle stelle fisse secondo il Ricciolio, ed altri astronomi è d'un grado, 23 min. primi, e 20 secondi (che si notano così $1,^{\circ}\ 23'$, $20''$) ogni cento anni: si domanda, in quanti anni le Fisse col detto moto proprio faranno tutto il giro del cielo, cioè gradi 360, ne' quali si suppone diviso il circolo massimo? Si riducano prima i gradi e min. primi in secondi,

cioè un grado, che vale 60 min. primi, e 23', cioè 83 si moltiplichi per 60 (num. di minuti secondi, che fanno un primo) e al prodotto 4980 si aggiunga 20 (num. de' secondi) e s'avrà 5000". Similmente li gradi 360 ridotti prima in minuti primi, poscia in secondi, daranno 1296000. Quindi disposti li termini giusta la regola, sarà 5000": 100:: 1296000": 25920 numero degli anni del periodo delle Fisse, il quale si dice volgarmente l'anno Platonico.

Es. V. Se oncie 3 d'una qualche merce vagliono soldi 15, quanto varranno libre 4 della medesima? Quì de' quattro termini proporzionali due riguardono il peso, due il valore, ma que' del peso non essendo dell'istessa denominazione, all'istessa debbon ridursi; onde o in vece dell'oncie 3 si deve sostituire $\frac{1}{4}$ di libra, e dire: Come $\frac{1}{4}$ di libra a 4 libre, così 15 soldi al valore cercato; overo in vece delle 4. libre sostituire 48 oncie, e dire 3 : 48 :: 15 : x, e in ambedue le maniere si troverà $x = 240$ soldi.

CCLII. Lo stesso si dica, se i termini della questione sieno frazioni, o misti d'intieri, e di rotti: cioè si facciano, se fa duopo,

del-

della stessa denominazione, e finita l'operazione, la specie del quarto numero alla maggiore, se sia possibile, si riduca. come sarebbe a dire le oncie a libre, i palmi a canne, li paoli a scudi &c, come nel seguente

Es. VI. Quanto varranno $\frac{6}{8}$ d' una canna di panno, cioè sei palmi, se $\frac{1}{3}$ d' una canna del medesimo è costato $\frac{3}{5}$ d'uno scudo, cioè in moneta paoli 6? Il prodotto del secondo pel terzo termine fa $\frac{18}{40}$, qual frazione divisa pel primo termine dà il quotiente $\frac{54}{40}$ d' uno scudo; Onde $\frac{1}{3} : \frac{3}{5} :: \frac{6}{8} : \frac{54}{40} = 1\,\frac{14}{40}$ perchè la frazione $\frac{54}{40}$ d' uno scudo vale uno scudo, e $\frac{14}{40}$, che ridotta alle specie della moneta Romana cioè paoli, bajocchi &c. fa 3 paoli, e cinque bajocchi, e perciò il quarto proporzionale $\frac{54}{40}$ d' uno scudo $= 1 . 35$.

CCLIII. Ponno alle volte due numeri de' tre dati, come il primo e'l secondo, o il primo e 'l terzo ridursi a minori, se, potendosi, si dividano per un qualche comun divisore, sostituiti in vece di essi li quotienti.

Es. VII. Sia data la proporzione 6 : 9 :: 8 : x

$8 : x = \frac{72}{6} = 12$. Or l'istesso quarto numero s'avrà, se dividasi o il primo e secondo per 3, o il primo e terzo per 2, mentre nel primo caso avremo $2 : 3 :: 8 : \frac{24}{2} = 12$, e nel secondo avremo $3 : 9 :: 4 \frac{36}{3} = 12$. E se il primo e secondo numero si divida di nuovo per 3, s'avrà $1 : 3 :: 4 \frac{12}{1} = 12$. Così anche se per mezzo di lettere diasi l'analogia, $abc : ade :: bf : Q = \frac{ade \times bf}{abc} = \frac{def}{c}$, overo dividendo per a, sarà $bc : de :: bf : Q = \frac{de \times bf}{bc} = \frac{def}{c}$; o anche dividendo per b, sarà $ac : ade :: f : Q = \frac{ade \times f}{ac} = \frac{def}{c}$; o finalmente dividendo per ab, sarà $c : de :: f : Q = \frac{de \times f}{c}$.

CCLIV. E siccome coll'esposto metodo di sostituire i quotienti, trovato che sia un comune divisore si diminuisce la fatiga del moltiplicare, o dividere, massime se il quotiente nato dalla divisione d'un qualche termine, sia $= 1$; Così per via di moltiplicazione alle volte si facilita l'operazione, sopratutto quando vi sieno frazioni.

Es. VIII. Sia l'analogia $\frac{5}{2} : 4 :: 3 : x$, si

potrà

potrà per maggior comodo sostituire o il doppio del primo e secondo 5 : 8 : : 3 : x , o il doppio del primo e terzo 5 : 4 : : 6 : x , perchè sempre il quarto numero sarà $\frac{24}{5} = 4\frac{4}{5}$. La ragione dell'una, e dell'altra preparazion de' termini esposta in questo, e nel num. preced. si ricava dal Lemma (n. 237.)

CCLV. Avvertisce opportunamente il Vallis, non doversi far uso della regola, se non se nelle quantità veramente proporzionali; nel che si è errato da taluni, che han voluto applicarla alle cose fisiche, tra le quali non sempre vi ha la proporzione. Così per es. dato, che un Corpo tirato dal suo peso faccia in 2 min. di tempo 20 piedi nello scendere, se si domandi, quanti piedi farà in 10 min. di tempo? giusta la regola si deve rispondere 100; il che è falso, perchè il moto all'ingiù procedendo dalla gravità, non è equabile, ma equabilmente accelerato. Se non che gli autori, che per via d'esempj adattano la regola a siffatte cose suppongono l'egual velocità nel moto, come il P. Clavio espressamente suppone, che l'acqua dal forame nel fondo d'un vaso esca con egual velocità, per trovare la proporzione tra la quantità dell'ac-

qua,

qua, che esce, e 'l tempo, in cui esce; realmente però la quantità dell' acqua scorrente non è proporzionale al tempo, in cui scorre, la sperienza stessa insegnando, che l' acqua più presto al principio, e di poi più tardi vada votando il vaso, in cui è contenuta: Che se nella stessa quantità sopraftesse sempre al forame, allora si verificherebbe la proporzione.

Regola d proporzione inversa semplice.

CCLVI. La regola inversa, o reciproca insegna a trovare il quarto termine reciprocamente proporzionale a tre dati. Si dicono poi reciprocamente proporzionali, quando delle ragioni tra se comparate l'una è inversa dell' altra (n. 235.) Nella proporzion diretta, come si è detto, tra il primo e 'l secondo termine vi ha la stessa ragione, che tra il terzo e 'l quarto: Onde *alternando* eguale ancora è la ragione del primo al terzo alla ragione del secondo al quarto; e vuol dire, che quanto il primo è maggiore o minore del terzo a se omogeneo, altrettanto il secondo debb' essere maggiore o minore del quarto omogeneo, che si cerca. Ma se il quesito talmente si proponga, che i termini non si corrispondano nel modo anzidetto, e quanto il primo è maggiore o minore del terzo omogeneo,

tanto

tanto il quarto incognito debba essere maggiore o minore del secondo, allora hassi a far uso della regola inversa.

PROBLEMA II.

CCLVII. DAti trè termini reciprocamente proporzionali a, d, b, trovare il quarto x.

Risoluzione. Il primo si moltiplichi pel secondo, e 'l prodotto si divida pel terzo, il quotiente sarà il richiesto, cioè $x = \frac{ad}{b}$. Sieno dati li numeri 4, 18, 6, e si cerchi il quarto reciprocamente proporzionale; sarà $\frac{4 \times 18}{6}$, cioè $\frac{72}{6} = 12$, e in fatti 4 : 6 inversamente come 18 : 12. La ragion dell'operato è, perchè ogni proporzion reciproca cangiasi in diretta, se quello, che nella reciproca è terzo termine, si faccia primo; perochè essendo nella reciproca il primo al terzo, come il quarto al secondo, sarà invertendo (n. 257.) il terzo al primo, come il secondo al quarto; e perciò pel teor. I. il prodotto del primo e secondo, che sono i mezzi termini, è eguale al prodotto del terzo e del quarto, che son gli estremi; ma di que-

sto prodotto il terzo è dato; dunque se pel terzo dividasi l' egual prodotto del primo e secondo, nel quotiente s' avrà il quarto.

CCLVIII. La differenza dunque, che corre tra l' una e l' altra regola è, che nella diretta si riguarda l' eguaglianza de' quotienti, nella reciproca l' eguaglianza de' prodotti; poichè in quella il quotiente del primo diviso per il secondo agguaglia il quotiente del terzo diviso per il quarto: laddove nella reciproca il prodotto del primo nel secondo agguaglia il prodotto del terzo nel quarto. Quindi si ricava l' esame dell' una e dell' altra regola, cioè della diretta, con vedere se i detti quotienti sieno eguali, overo, ch' è lo stesso, se il prodotto del primo e del quarto termine è eguale al prodotto del secondo e terzo; e della inversa, con disaminare, se il prodotto del primo e secondo è eguale a quello del terzo, e quarto.

CCLIX. La difficoltà in conoscere qual delle due regole debba adoperarsi ne' quesiti, che si propongono, resta tolta per ciò, che si è detto al n. 256, come co' seguenti esempj si rende manifesto.

Es. I. Se ad alzare una fabrica, o a mietere un campo, o a coltivare un terreno, o ad altra qualunque opera ci volesse 12 Ope-

rai

rai in 20 giorni: adoperandosi 6 Operai in quanti giorni compirebbero l' opera? Già si vede in questo e in somiglianti quesiti, per la natura stessa di essi, che quanto più pochi son gli operai, tanto maggiore si richiede il tempo a perfezionar l' opera; onde quanto il primo termine 12 è maggior del terzo omogeneo 6, altrettanto il termine quarto debb' esser maggior del secondo. Adunque secondo la regola inversa il quarto termine è $= \frac{12 \times 20}{6}$ $= \frac{240}{6} = 40$. Che se volesse adoprarsi la regola diretta, si dispongano i termini, come si è detto nella risoluzion del probl. cioè $6 : 12 :: 20 : \frac{12 \times 20}{6} = 40$.

Es. II. Per 2100 Soldati assediati vi è vittuaglia per soli 4. mesi, ma dovrebbero sostenere l' assedio per un' anno: or non bastando per questo tempo la vittuaglia a tutti, quanti se n' hanno a ritenere? Certamente più pochi, e in conseguenza quanto il primo numero 4 è minore del terzo omogeneo 12, tanto il quarto, cioè il numero de' soldati da ritenersi dev' esser minore degli esistenti, cioè $= \frac{8400}{12} = 700$; il che anche riesce, se secondo la regola diretta si faccia $12 : 2100 :: 4 : 700$.

giata per tutti due li campi, le lunghezze debbono essere in ragion inversa delle larghezze. Perciò disposti i termini secondo la regola inversa sarà la larghezza richiesta $= \frac{40 \times 4}{20} = 8$.

La regola di proporzione composta diretta.

CCLX. Si dice composta, quando costa di due o più analogie. Imperochè oltre i tre termini principali sogliono nella questione esservi degli altri, che sono come gli aggiunti a quelli, e dinotano il tempo, o il guadagno, o il danno, o altre circostanze. E se il quesito ha i suoi termini così principali, come meno principali ordinatamente disposti, cioè in guisa che in terzo luogo si trovi quel termine principale, che porta seco annessa la questione insieme con la sua circostanza, e nel primo l'omogeneo al terzo parimente con la sua circostanza; nel secondo poi l'omogeneo al cercato; allora la regola da usarsi si chiama composta diretta.

PROBLEMA III.

Dati che sieno più di trè i termini direttamente proporzionali, ritrovare l'ultimo.

CCLXI. Per la risoluzione due sono i metodi. Il primo è di risolvere l'analogia composta nelle semplici, di cui costa, e adoperare in ciascuna di esse la regola del tre semplice; l'altro è di ridurre i termini meno principali a' principali con la moltiplicazione. Soggiungo gli esempj secondo il primo metodo.

Es. I. Se 4. Convittori spendono in 3 mesi scudi 20, quanti ne spenderanno Convittori 6 in un'anno? In quest'esempio si comparano persone con persone, e tempo con tempo, per indi didursene la ragion delle spese. Perilche dividendo l'una analogia dall'altra, si dica prima: Se Convittori 4 spendono scudi 20, quanti nell'istesso tempo ne spenderebbero Convittori 6? Si troverà la spesa di 30. Poscia si dica: Se in 4 mesi si spendono scudi 30, quanti se ne spenderanno in mesi 12? Si troverà 120. L'istesso ne verrebbe, se prima la ragion del tempo, poi quella delle persone s'istituisse.

Es. II. Libre 200 d'una certa merce trasportate per 180 miglia esiggono 30 scudi di spesa, quanti n'esiggerà il trasporto per 300 miglia di libbre 400 dell'istessa merce? Disposti i termini della prima analogia 200 : 30 : : 400? s'avrà il quarto proporzionale = 60.

60. Indi si dica, se il trasporto per miglia 180 mi dà la spesa di sc. 60, il trasporto per 300 miglia mi darà sc. 100, poichè 180 : 60 :: 300 : 100.

CCLXII. Più spedito forse riesce il secondo metodo, ch'è di moltiplicare ciascun termine principale pel suo aggiunto, e così ridurre i termini a' tre soliti della regola semplice, com'è da vedersi negli esempj.

Es. III. Diece scudi in 3 mesi han fruttato col negozio scudi 4; 100 scudi in 15 mesi quanto frutteranno? Si moltiplichi l'uno e l'altro capitale per il suo tempo, e ridotti i termini a tre, si troverà il quarto secondo la regola semplice.

Sc. 10×3 mesi	Guadagno 4.	sc. 100×15 mesi?	
30	: 4	:: 1500	200

Se il detto quesito si proponesse in questa guisa: Scudi 10 danno scudi 4 di guadagno in 3 mesi, in quanto tempo scudi 100 daranno il guadagno di scudi 200? Non si può ridurre per via di moltiplicazione alla regola semplice, perchè si dovrebbe il capitale moltiplicare per il guadagno, ma l'enunciato guadagno non è proporzionale al capitale, com'è chiaro; non essendo 4 a 10, come 200 a 100: onde moltiplicati insieme

a due a due, darebbero i prodotti 40, e 20000; quindi disposti in proporzione, sarebbe 40 : 3 : : 20000 : : 1500, qual termine importerebbe il tempo assai maggior del dovere. Perilche in questo, e in simili casi è necessario risolvere il quesito in due analogie, e dire

sc. lu. sc. lu.
10 : 4 : : 100 ? 40; cioè scudi 100 daranno di lucro 40 sc. in 3 mesi, ne' quali sc. 10 han dato il lucro di sc. 4. Laonde perchè si sappia in quanto tempo scudi 100 lucrerebbero

sc. m. sc.
200, si dica di nuovo, 40 : 3 : : 200 ? 15. Adunque se 10 sc. in 3 m. han lucrato 4. sc., 100 sc. lucreranno 200 in m. 15.

CCLXIV. Per conoscere adunque, quando abbia luogo nella regola composta il secondo metodo, si deve ciò didurre dalla natura stessa della questione, la quale non debb' esser cambiata, coll'esser ridotti i quattro termini a due per via di moltiplicazione. L'Es. III. proposto nella prima maniera si può, moltiplicandosi i termini principali per i loro aggiunti, ridurre alla regola semplice; poichè sc. 10 in 3 mesi lucrano tanto, quanto 30 sc. in un mese, e 100 sc. in 15. mesi altrettanto, quanto 1500 in un mese: Onde la questio-

stione in qualunque delle due maniere si proponga, sempre è l'istessa. Non così però se propongasi, come nel n. 263. ove essendo ignoto il tempo, che si cerca, non può moltiplicarsi il capitale 100 per il lucro 200, perchè questo non è proporzionale al lucro 4. del capitale 16.

Es. IV. generalmente proposto per lettere. Se persone P in tempo T spendono scudi S; persone p in tempo t quanti ne spenderanno? Dico, che sarà $PT : S : pt : z = \frac{pt \times S}{PT}$

Imperochè risoluta la composta in due semplici, sarà $P : S :: p : x$, $T : x :: t : z$.

Quindi I. sarà $x = \frac{pS}{P}$, $z = \frac{tx}{T}$, e sostituendo nella seconda equazione allo x il valore di esso trovato nella prima, sarà $z = \frac{t \times pS}{PT}$, e risolvendo questa equazione in analogia, s'avrà $PT : pt :: S : z$.

Es. V. Cinque persone consumano un rubbio di grano comprato a sei scudi in otto settimane, quanta è ogni giorno la spesa di cia-

cheduna ? Si ordinino i termini

Perſ. Sett.	ſc.	Perſ. Giorno
5 8	6	1 1 ?

Si riducano le ſettimane a giorni, e per maggior facilità anche gli ſcudi a bajocchi

Perſ. Gior.	bajoc.	Perſ. Gior.
5 56	600	1 1 ?

Moltiplicati inſieme i due numeri del primo, e i due numeri del terzo luogo, ſarà ridotta la reg. compoſta a ſemplice in tal guiſa $280 : 600 :: 1 : 1 : \frac{600}{280} = 2\frac{40}{280} = 2\frac{1}{7}$.

Secondo il primo metodo, cioè riſolvendo la compoſta in due ſemplici, ſi paragonino prima le perſone tra loro, e poſcia i tempi in queſta forma,

Perſ. 5 : bajoc. $600 :: 1 : 120$

Gior. 56 : bajoc. $120 :: 1 : 2\frac{8}{56} = 2\frac{1}{7}$

CCLXV. Se nel primo, e nel terzo luogo dell'analogia compoſta ſi trovi un'iſteſſo termine, queſto si può ommettere, come nell' Eſ. VI.; E generalmente potendosi i dati termini ridurre a più pochi, più facile addiviene l'operazione, come nell' Eſ. VII.

Eſ. VI. Cento ſcudi in mesi 8. han fruttato 20 ſcudi, in quanto tempo gli ſteſſi 100 ſcudi frutteranno 300? La diſposizion de' termini è queſta $20 : 8 :: 300 : \frac{2400}{20} = 120$.

Eſ.

Es. VII. Un mercante avendo comprato 300 libre d'una certa merce per sc. 60, cerca, quanto guadagnarebbe per 100 sc., se vendesse le 300 libre per sc. 64, o quanto ci perderebbe, se le vendesse sc. 57? Chiara cosa è, che per gli sc. 60 guadagnerebbe in questa ipotesi 4 sc., e ci perderebbe 3 scudi, perchè nel primo caso avrebbe $60+4$, nel secondo $60-3$. Or dunque si dica, se sc. 60 danno di lucro 4, e di perdita 3, quanto lucro, o quanta perdita darebbero sc. 100? Si troverà il lucro $= 6\frac{2}{3}$, la perdita $= 5$.

CCLXVI. Coll' istesso metodo, cioè con la moltiplicazione qualunque analogia anche più composta, cioè di 7, o più termini, si può ridurre a tre soli.

Es. VIII. A fare una fortificazione lunga 500 tese, larga 12, alta 2, ci vollero 8 giorni; quanto tempo ci vorrà a farne un'altra lunga 900 tese, larga 20, alta 3, impiegandosi l' istesso numero d' operai? Ecco l' operazione.

lungh.	*largh.*	*alt.*	*gior.*	*lungh.*	*largh.*	*alt.*
500 *tese*,	12,	2	8	900,	20,	3
× 12				×20		
6000 *tese quadrate*				18000 *tese quad.*		

 6000

6000 *tese quadrate*	gior.	18000 *tese quad.*
× 2	8	× 3
12000 *tese cubiche*		54000 *tese cubiche?*

$\frac{432000}{12000} = 36$.

CCLXVII. Alle volte nell'uso della regola non solo composta, ma anche semplice accade, che a ben disporre i termini sia duopo d'un poco di raziocinio, come ne' due seguenti esempj, l'uno della regola semplice, l'altro della composta.

Es. IX. Quanto debbon comprarsi libbre 100 d'una certa merce, acciocchè dipoi vendute 64 scudi dieno di lucro sc. $6\frac{2}{3}$ per cento? E' chiaro, che volendosi il lucro di $6\frac{2}{3}$ per 100, si vuole, che il capitale 100 diventi $106\frac{2}{3}$; si dica dunque così: Se scudi $106\frac{2}{3}$, che contengono il capitale insieme e 'l lucro, sono il frutto di 100; 64 scudi da qual somma proverranno, sicchè frutti $6\frac{2}{3}$ per 100? Ecco la disposizion de' termini $106\frac{2}{3}$: 100 : : 64 : $x = 60$. Dunque le libbre 100 debbon comprarsi sc. 60, perchè vendute sc. 64 dieno di lucro sc. 4, o ch'è lo stesso, sc. $6\frac{2}{3}$ per 100.

Es.

Ef. X. A 600 affediati si ponno diftribuire 20 oncie di pane il giorno per 4 mefi; ma potendo l' affedio durare più a lungo, fi cerca, fe riducafi il num. degli affediati a foli 500, quanto pane fi debba a ciafcuno dare per lo fpazio di 6 mefi? quefto quefito comeche abbia cinque termini, non appartiene realmente alla regola compofta, ma bensì alla femplice inverfa; giacchè 600 foldati in 4. mefi è l'ifteffo, che quattro volte 600 in un mefe, e fimilmente 500 in mefi 6 è l'ifteffo, che fei volte 500 in un mefe: Onde iftituendo l'analogia in tal guifa, 2400 hanno ogni giorno 20 oncie di pane per ciafcheduno, 3000 quanto ne avranno? Chiara cofa è, tanto meno di pane doverfi diftribuire, quanto più è il numero de foldati &c.

CCLXVIII. Qualora il termine cercato aveffe anneffa una o più condizioni diverfe da quelle, che accompagnano il termine omologo della queftione, e molto più, fe per effe la queftione foffe parte fecondo la regola diretta, parte fecondo l'inverfa, in tal cafo fà duopo rifolver la regola compofta in due femplici, come nel fequente

Ef. XI. Certa piazza larga 18 tefe, e 4. piedi, lunga 21 tefe fi è laftricata con 1800 pie-

pietre larghe ciascuna 8 pollici, e lunghe 14 pollici. Or il lastricato d'un'altra piazza larga 20 tese, lunga 24. tese e 3 piedi, quante pietre richiede, la lunghezza delle quali sia di 16 pollici, e la larghezza di 12 pollici? Il quesito ha nove termini, e li due annessi al cercato son diversi da que', che accompagnano il termine omologo, cioè le pietre 18000. Perilchè poste un poco da banda questi annessi si riduca la questione a cinque termini in tal guisa: Una piazza larga 18 tese e 4 piedi, lunga 21 tese oontiene 18000 pietre; quante di simili pietre richiederà una piazza larga 20, e lunga 24 tese e mezzo? Ridotti questi cinque termini a tre per mezzo della moltiplicazione, si dica: Se per 392 tese quadrate si richiedono 18000 pietre, quante se ne richieggono per 490 tese quadrate? Il quarto termine sarà 22500, cioè il numero delle pietre da lastricare la seconda piazza, simili però a quelle della prima. Ma perchè nel quesito si propongono le pietre della seconda piazza di diversa grandezza da quelle della prima, perciò questo termine incognito hassi a trovare per mezzo di quest' analogia, cioè se 8. pollici di larghezza, e 14. di lunghezza (che sono le misure delle pietre adopera-

perate nella prima piazza) esigerebbero pietre 22500; 12 pollici di larghezza, 16 di lunghezza (che sono le misure delle pietre da adoperarsi) quante pietre richiedono? Ridotti li cinque termini a tre, ne verrà quest'analogia: 112 pollici quadrati esiggono pietre 22500 della misura cercata, quante ne vorranno di questa misura pollici quadrati 192? Si troverà il quarto termine secondo la regola inversa, poichè quanto minore è il primo termine del terzo, tanto inversamente il quarto debb' esser minore del secondo, e perciò il quarto cercato secondo la detta regola sarà 13125.

CCLXIX. Per non andar più a lungo in questa materia, basterà dare analiticamente un metodo generale, per risolvere tutt' i casi della regola composta; essendo ciò proprio dell'analisi, come altrove si è osservato, il comprendere con un solo teorema proposto a guisa di formola, o di canone, tutt' i casi particolari in una data materia. E che sia così nella materia presente, premetto, che de' cinque termini della regola composta (se fossero più di cinque, sempre a cinque si possono ridurre, con moltiplicare que', che possono insieme moltiplicarsi, senza cambiare la

natura del quesito) tre sono sempre condizionali, e due determinano la questione; per es. si domandi: Se 100 scudi fruttano in 11 mesi scudi 6 (questi sono li condizionali); quanto frutteranno scudi 300 in 9 mesi di negozio? (questi determinano la questione) Or a' numeri si sostituiscano le lettere; ed acciocchè possano servire per tutti li casi, quel numero, che quì significa il denaro, e in genere può significare la cagion principale dell' azione, del lucro, del danno, o di cose simili, si chiami *A*, quello, che significa il tempo, la distanza, o cose simili, si chiami *B*; quello finalmente, che dinota l'azione stessa, il lucro, il danno &c, si chiami *C*. Coll' istesse lettere, ma piccole si notino i termini della questione, cioè con *a*, *b*, *c*, come per l'esempio proposto

	(A =	100	*Termine principale*
Termini condi-	(B =	12	*Tempo*
zionali	(C =	6	*Lucro*
Termini della	(a =	300	
questione	(b =	9	
	(c =	$13\frac{1}{2}$	

S' istituisca una doppia regola del trè; primieramente paragonando le principali cause

delle

delle azioni con le stesse azioni, come quì il denaro posto a censo col suo lucro ed avrassi la prima analogia $A : C :: a : \frac{Ca}{A}$; indi comparando i tempi co' lucri, e s' avrà la seconda $B : \frac{Ca}{A} :: b : c$; e adattandosi li numeri sarà I. $100 ; 6 :: 300 : \frac{1800}{100} = 18$, II. $12 : 18 :: 9 : \frac{162}{12} = 13\frac{1}{2}$.

CCLXX. *Corollario*. Essendo $B : \frac{Ca}{A} :: b : c$, sarà $Bc = \frac{Cab}{A}$, cioè il prodotto degli estremi eguale al prodotto de' mezzi. Dunque moltiplicando per A, avrassi $BcA = Cab$. E quest' ultima equazione è appunto la Formola generale per la risoluzione d' ogni qualunque quesito della regola composta, disposti che sieno i termini così condizionali, come que' della questione in questa foggia $\begin{matrix} A . B . C . \\ a . b . c . \end{matrix}$

CCLXXI. Da tal disposizione di termini si ricavano due regole per tutt' i casi, che si ponno proporre; cioè a dire o il termine che si cerca è il terzo di que', che determinano la questione, overo è un de primi due: Se è il terzo, come nell' es. di sopra addotto, e in tal caso $\frac{Cab}{AB} = c$; Se è il primo, allora $\frac{BcA}{bC} = a$;

$= a$; e se è il secondo, sarà $\frac{bcA}{Ca} = b$.

Sicche per il primo caso abbiamo questa regola: De' cinque dati termini si moltiplichino tra se gli ultimi tre, e 'l prodotto si divida per il prodotto de' primi due, il quotiente sarà il sesto cercato. Si adattino alle lettere i numeri, e avremo $6 \times 300 \times 9 = 16200$, $100 \times 12 = 1200$. Dunque $\frac{16200}{1200} = 13\frac{1}{2} = c$.

Per il secondo caso abbiamo quest'altra regola. De' cinque dati il prodotto del primo, secondo, e ultimo termine tra se moltiplicati si divida pe 'l prodotto de rimanenti termini, il quotiente darà il cercato. Per es. se si voglia il primo, e si proponga il quesito così, scudi 6 in mesi 12 sono il provento di scudi 100, qual sarà il capitale di scudi $13\frac{1}{2}$ in mesi 9? Secondo la regola s'avrà $\frac{12 \times 13\frac{1}{2} \times 100}{9 \times 6} = \frac{16200}{54} = 300$. Similmente volendo il secondo termine, cioè il tempo, s'avrà $\frac{12 \times 13\frac{1}{2} \times 100}{300 \times 6} = \frac{16200}{1800} = 9$.

CCLXXII. Coll'uso di questa doppia regola

gola potrà ciascuno facilmente risolvere le questioni tutte della regola del tre composta, ancorche l'una delle componenti sia reciproca, come da alcuni esempj, che per esercizio quì soggiungo, si vedrà chiaro.

I. Due Bovi ponno lavorare in 6 giorni 13 moggiate, quante nè lavoreranno Bovi 8 in giorni 24? Secondo la prima regola sarà il termine cercato = 208, mentre $\frac{13 \times 8 \times 24}{2 \times 6} = \frac{2496}{12} = 208$.

II. Operaj 22 faticando 9 ore il giorno arrivano a fare 30 tese di lavoro in 16 giorni; quanti giorni spenderanno Operaj 15, che fatichino 8 ore il giorno, perchè facciano 25 tese di lavoro? La questione contiene 7. termini, che si riducono a 5, con moltiplicare il numero degli operaj per le ore rispettive del lavoro in ciascun giorno; essendo lo stesso il dire, 22 operaj, che faticano 9 ore il giorno, che nove volte 22, cioè 198 che faticano un'ora il giorno. Perilche disposti li termini secondo la formola $\frac{A.B.C.}{a.b.c.}$, e giusta la regola seconda $198 \times 16 \times 25$, e dividendo per 120×30, s'avrà $\frac{79200}{3600} = 22$, ch'è il numero de' giorni richiesto.

III.

III. A 3 Soldati bastano 36 libbre di pane per 6 giorni, libbre 180 per quanti giorni basteranno a 9 Soldati? Giusta la reg. seconda si troverà, che basteranno per giorni 10. Ov'e da osservare, che delle due analogie una è diretta, l'altra inversa; la diretta è, Libbre 36 bastano per giorni 6, per quanti giorni basteranno libbre 180? si risponderà, per giorni 30. L'inversa poi è: Se una data quantità di pane basta a soldati 3 per giorni 30, a Soldati 9 per quanti giorni basterà? Certamente per più pochi, cioè giorni 10.

IV. Otto negozianti guadagnano scudi 4 in mesi 5; quanto guadagneranno 32 negozianti in due anni, cioè in mesi 24? Giusta la reg. prima il lucro sarà di sc. $76 \frac{4}{5}$.

CAPO III.

Delle Regole dette volgarmente di Società, di falsa Posizione, e di Alligazione.

CCLXXIII. Non sono da trasandarsi queste tre regole, che dall'istesso fonte delle Proporzioni derivano, ed hanno nella vita civile grandissimo uso. Chiamasi

si la prima di *Società*, perchè sogliono servirsene i negozianti uniti in società, qualora hanno a dividersi il guadagno, o la perdita corrispondenti alle rate poste in capitale.

La regola dunque di Società dà il metodo di partire un numero dinotante a cagion d'esempio il guadagno o la perdita, in parti proporzionali ai numeri dati, che dinotino le rate. Può esser di due maniere, semplice, e composta.

CCLXXIV. *La Semplice* è quella, in cui non si ha conto del tempo, che si suppone lo stesso per tutt'i colleghi: onde in essa si riduce la questione a tre termini, ma da replicarsi tante volte, quante sono le rate di ciascheduno; sicchè in primo luogo pongasi la somma di tutte le rate, nel secondo la somma da distribuirsi, in terzo luogo ciascheduna rata; e così disposti li termini s'istituisca la regola del tre tante volte, quante sono le rate; e in quarto luogo s'avranno i cercati: poichè la somma di tutte le rate, debb'essere alla somma del lucro o danno totale, come la rata di ciascheduno al lucro o danno corrispondente. Eccone gli Esempj.

Es. I. Tre negozianti *A*, *B*, *C* posero in società la somma di 960 scudi, de' quali

240 erano del primo *A*, 320 del secondo *B*, 400 del terzo *C*. Il guadagno fù di 120 scudi. Si cerca quanto ne tocchi a ciascheduno secondo le loro rate. Si dispongano i termini nel modo anziderto, cioè in tal guisa

(240 : 30 *lucro del primo A*
960 : 120 : : (320 : 40 *lucro del secondo B*
(400 : 50 *lucro del terzo C*.

Es. II. Deve farsi il dipartimento di 760 scudi fra tre persone in modo, che quante volte al primo si danno 10, tante volte al secondo si dieno 7, e al terzo 2; si domanda quanto avrà ciascheduno? Si uniscano i tre dati 10, 7, e 2, e la somma 19 ottenga il primo luogo, il secondo la somma da distribuirsi, e 'l terzo si abbia da ciascheduno de' dati: si dica pertanto, se 19 dà 760, quanto darà 10, e poi 7, e poi 2? Si troverà per il primo 400, pel secondo 280, pel terzo 80.

Es. III. Quattro persone *A*, *B*, *C*, *D* posero in sorta comune la stessa somma, ma non per l'istesso tempo. Il primo *A* la tenne in negozio per lo spazio di 7 mesi, il secondo *B* per 18 mesi, il terzo *C* per 10, il quarto *D* per 9; il guadagno fù di 2200 scudi. Si cerca quanto tocchi a ciascuno? Qui comeche si fa menzione del tempo, ch'è diverso, nulla però di me-

no essendo la stessa somma posta in sorta comune, la regola è semplice, in cui avendosi conto soltanto de' tempi, si pone in primo luogo la somma de' mesi, in secondo luogo il guadagno totale, e in terzo luogo i mesi, in cui si è da ciascuno tenuto in negozio il suo denaro, e s'avrà secondo la regola

$$44 : 2200 :: \begin{cases} 7 : 350 \\ 18 : 900 \\ 10 : 500 \\ 9 : 450 \end{cases}$$

CCLXXV. Ma se debb' aversi conto e del denaro impiegato in diversa somma, e del tempo diverso, in cui si è impiegato, allora la regola è *Composta*; e in tal caso ha luogo ciò, che abbiam detto nella regola del tre composta (n.261, e 262) cioè o si risolve nelle semplici, o con moltiplicare i termini principali per gli aggiunti, si riduce alla semplice. Per es. trattandosi di denari impiegati in tempi diversi, si moltiplichi prima il denaro di ciascheduno per il suo tempo, e ridotti in somma s'istituisca la regola del tre, e si faccia, come la somma de' detti prodotti a tutto il guadagno, o danno, così ciascun prodotto alla porzion del lucro, o danno corrispondente.

come le fa il primo, che far tese tre volte sei, cioè 18, e il medesimo si dica degli altri operaj. Perilche a ridurre questi termini, esamino quante tese ognuno degli operaj fa in un giorno, e trovo (dividendo il numero delle tese, che ognuno fa secondo l'ipotesi, per il numero de' giorni, che v' impiega) 2 pel primo, 3 pel secondo, e 4 per il terzo, quali numeri uniti insieme fanno 9, cioè i tre Operaj nel tempo medesimo, cioè in un giorno operando, fanno 9 tese di lavoro, quindi per 15 giorni verranno a fare 135 tese, ch' è il prodotto di 15 per 9, giusta il proposto. A trovar poi, quanto di queste 135 tese si deve attribuire a' singoli, replico la regola del tre volte, dicendo pel primo Operajo, se di 9 tese ne fa due, quante ne farà di 135; e similmente per il secondo, e per il terzo, e troverò i numeri cercati essere 30, 45, 60, che parimente avrei trovato, col moltiplicare i quotienti 2, 3, 4 per 15 num. de' giorni. La paga finalmente a ciascuno dovuta sarà = al prodotto de' num. 30, 45, 60 per 12.

Regola della falsa Posizione.

CCLXXVII. Qui ha luogo la regola, che chiamasi *di falsa posizione*, perche a' termini

incogniti surroga altri ad arbitrio, purchè sieno a' detti proporzionali secondo la domanda. A cagion d'esempio debbasi far il dipartimento di 2400 sc. proporzionalmente al denaro posto in sorta comune da tre Colleghi *A*, *B*, *C*, de' quali il terzo *C* avea in esso quanto i due altri uniti insieme, e 'l secondo avea messo il doppio del primo. Poiche mi è ignoto il quanto precisamente abbiano posto, e soltanto mi è nota la proporzion delle rate, a queste sostituisco tre numeri, che abbiano la proporzione proposta, e assumendo, che *A* messo abbia 10, devo supporre che *B* ne abbia messo 20, e *C* 30, perchè 20 è il doppio di 10, e $30 = 20+10$ giusta le proposte condizioni; quindi la somma di questi tre numeri, cioè 60 debb' essere alla somma da distribuirsi, come ciascuno degli assunti alla porzione convenevole

$$60 : 2400 :: \begin{cases} 10 : 400 \\ 20 : 800 \\ 30 : 1200 \end{cases}$$

Nell' istessa maniera se fingasi, che *A* abbia posto 3, *B* ne avrà posto 6, *C* 9, e la somma di essi è 18, e similmente sarà 18 : 2400 :: 3, 6, 9 : 400, 800, 1200, come sopra.

Rego-

Regola d'Alligazione.

CCLXXVIII. Ha luogo la presente regola così detta *d'Alligazione*, qualora v'ha una mistura di varie cose, come di varj liquori, o metalli, di varie merci, e cose simili; affin di trovare il prezzo corrispondente alle quantità delle cose meschiate. E' di due sorti, cioè la *mezzana*, e *l'alternante*. Con la prima, dati che sieno e 'l prezzo di tutta la mistura, e la somma delle cose meschiate o da meschiarsi, si cerca il prezzo mezzano di ciascuna. A fine di trovarlo, s'istituisca la regola del tre, e si faccia, come la Somma delle cose meschiate o da meschiarsi alla somma de' prezzi delle medesime, così ciascuna porzion della mistura al prezzo mezzano corrispondente. Soggiungo due esempj a dichiarar la regola.

I. Hassi a fondere una statua d'argento, ma di diverso carato, uno valutato 30 sc. la libra; l'altro sc. 25. L'artefice pone 120 libre del primo; 180 del secondo. Si cerca, quanto costi ogni libbra dell'argento già meschiato?

120 *lib. del* 1. *car.* (*costano sc.* 3600
180 *lib. del* 2. *car.* (*sc.* 4500

300 (*Somma delle lib.*)(*del prezzo* 8100

$300 : 8100 :: 1 : \frac{8100}{300} = 27$.

II. Si ſon meſchiati tre ſorti di vino, uno coſta 18. carlini, l'altro 22, il terzo 25 il barile; i barili poi del vino della prima ſorte erano 13, que' della ſeconda 15, que' della terza erano 18. Quanto dovrà vendersi ogni barile del vino così meſchiato? Riſpondo, Carlini 23; poiche 46 (ſomma de Barili) : 1058 (ſomma de' Carl.) :: 1 : 23.

CCLXXIX. La pruova di ſiffatta operazione ſi fa, comparando tutto il prezzo delle coſe prima della miſtura col prezzo delle medeſime dopo di eſſa, quali prezzi debbono eſſere eguali per la natura della proporzione, in cui il prodotto degli eſtremi è eguale al prodotto de mezzi.

CCLXXX. La regola *alternante* fa, che propoſto un qualche prezzo mezzano, ſi trovi quanto delle varie merci, o di coſe ſimili ſi abbia a meſchiare, ſicche ſi poſſa la miſtura poi vendere al prezzo da prima ſtabilito. Più caſi comprende la detta regola.

CCLXXXI. Il primo è, quando dati e i prezzi delle coſe da meſchiarſi, e 'l prezzo mezzano aſſunto, ſi cerca la determinata quantità delle coſe, che ſi hanno a meſchia-

re.

re. Sieno per es. due forti di vino, un barile della prima sorte costi 24 carlini, della seconda sorte costi 35. Carl. Or quanti barili dell'una e dell'altra sorte debbon meschiarsi, acciò che i singoli poi della mistura si vendano carl. 33? Per risolvere il quesito, si pongano i due dati prezzi l'uno sotto l'altro, e a sinistra pongasi il prezzo mezzano 33 infra i dati, a destra poi si pongano le differenze tra i valori naturali delle due sorti di vino e 'l valore assunto, ma alternamente, cioè la differenza tra 24 e 33, ch'è 9 si ponga presso il maggior valore 35, la differenza tra 35, e 33, ch'è 2 si ponga presso il minore 24, com'è da vedersi nella figura.

33	|24|	2, cioè	$35 - 33 = 2$
	|35|	9	$33 - 24 = 9$

le differenze 2, e 9 danno il numero de' barili, che hanno a meschiarsi, cioè 2 della prima sorte, e 9 della seconda. E che ciò sia vero, ne dà la pruova la regola d'alligazione, col moltiplicare i prezzi, o valori dati per le differenze vicine; quindi sommando questi due prodotti, com'anche le due differenze s'istituisca la regola del tre, e nel quarto proporzionale s'avrà il prezzo mezzano assunto. Eccone l'operazione: $2 \times 24 = 48$,

35

$35 \times 9 = 315$, $48 + 31g = 363$, e $2 + 9 =$ 11. Adunque $11 : 363 :: 1 : \frac{363}{11} = 33$.

CCLXXXII. Il ſecondo caſo è; quando dati li prezzi delle coſe da meſchiarſi, e il prezzo mezzano della miſtura; com'anche la quantità determinata d'una delle date coſe, ſi cerca la quantità delle altre. Si cerca quante quarteruole per eſ. di grano, che vaglia 20 paoli la quarteruola, debban meſchiarſi con 10 quarteruole d'altro grano inferiore, che vale 14 paoli la quarteruola, affinche così meſchiate poſſano venderſi 16 paoli la quarteruola. Si diſpongano, come nel primo caſo le differenze de' prezzi alternamente a canto de' dati prezzi; e 'l prezzo mezzano a ſiniſtra, così:

16	20	2
	14	4

Indi s' iſtituiſca l'analogia: Come la differenza 4 a 10 (quantità del grano inferiore) Così la differenza 2 al quarto proporzionale, ch' è 5. Di fatti ſe le quarteruole 5 inſieme con le 10 date ſi vendano 16 paoli la quarteruola, varranno 240, quanto appunto valevano prima di meſchiarſi, poiche le 10 a 14 paoli fanno 140, e le 5 a 20 paoli fanno 100. e $100 + 140 = 240$.

CCLXXXIII. Il terzo caſo è quando più coſe

se co' suoi proprj prezzi si propongono, ma in maniera, che un prezzo almeno sia maggiore, un'altro sia minore del prezzo arbitrario; allora non basta una sola alligazione, il che meglio s'intenderà coll'esempio. Debbano meschiarsi quattro sorti di vino. Una data qualunque misura del primo vino costi 3 bajocchi, del secondo 4, del terzo 6, del quarto 9. Queste misure si dicano *A*, *B*, *C*, *D*. Si cerca, quanto di ciascheduno debba prendersi, acciocchè così meschiato vendasi a bajocchi 7 la misura, qual prezzo si dica *M*. Si dispongano ordinatamente i dati prezzi l'un sotto l'altro, e si faccia l'alligazione de' due prezzi *A*, *D*, cioè si comparino ambedue col prezzo *M*, sottraendoli dal medesimo, e mettendo a lato di essi alternamente le differenze, cioè a lato di *A* la differenza 2, e a lato di *D* la differenza 4. Similmente si faccia l'alligazione de' prezzi *B*, *D*, com'anche de' prezzi *C*, *D* (un solo de' dati prezzi si può più volte alligare, gli altri una sola volta) le differenze alternatamente si pongano presso *B*, *C*, *D*, come si vede fatto qui.

	Prezzi,		Diff.
M 7	*A*	3	2
	B	4	2
	C	6	2
	D	9	4. 3. 1
		somma	14

$$14 : 1 : \begin{cases} 2 : \frac{2}{14} \\ 2 : \frac{2}{14} \\ 2 : \frac{2}{14} \\ 8 : \frac{8}{14} \end{cases}$$

Si sommano insieme tutte le differenze; la somma delle quali sarà quì 14; e s'istituisca tante volte la regola del trè, quante sono le differenze, cioè come 14 : 1 : : la prima, la seconda, la terza, e la quarta differenza (che quì è $4 + 3 + 1 = 8$) al quarto proporzionale. E poiche le frazioni trovate, cioè le parti della mistura sommate insieme fanno $\frac{14}{14} = 1$, ciò è segno essersi ben' operato, avendosi la misura che si cercava.

CAPO IV.

Fondamenti delle sudette regole di Proporzione.

CCLXXXIV. A gran ragione asserì il ch. Giacomo Bernoulli *tom.* 1. *solut. terg. probl.* che la più parte delle regole arimmetiche, cioè del Falso, d'Alligazione, di Società, ed altre simili, anzi la stessa regola del trè (delle quali abbiam parlato ne' due capi precedenti) talmente dipendono dall'Algebra, che o per mezzo di essa si sono la prima volta trovate, o se s'ignorino e vadano in oblio,

posse-

possono agevolmente coll' ajuto della medesima di nuovo rinvenirsi e dimostrarsi; nè altro essere l'equazioni algebraiche se non come tanti principj, da inferirsene sempre nuove regole, onde l'Arimmetica de' numeri vieppiù s'aumenti. Quanto ciò sia vero, si vedrà chiaro nella parte III, e per le cose, che ora diremo.

CCLXXXV. E nel vero ripigliando le affezzioni della Proporzione, e specialmente quella, ch' è la principale dimostrata nel Teorema I., e II. del capo primo, cioè che nella proporzion geometrica discreta il prodotto degli estremi è eguale al prodotto di que' di mezzo, e nella continua il prodotto degli estremi agguaglia il quadrato del mezzo: da ciò ne siegue, che dati tre qualunque termini di detta proporzione, si dà anche o il quarto, o il terzo, o il secondo, o il primo. Perochè sia $a : b :: c : x$, sarà $ax = bc$, e dividendo $x = \frac{bc}{a}$, ch' è la formola della regola del tre diretta, per cui dati tre, si cerca il quarto proporzionale (n. 250.) E se $a : b :: x : c$, sarà $ac = bx$, e dividendo sarà $x = \frac{ac}{b}$, ch' è il terzo proporzionale richiesto &c.

CCLXXXVI. Dall' istesso principio dipen-

de

de, e si dimostra la regola del trè inversa, per cui, dati tre termini, si cerca il quarto reciprocamente proporzionale, cioè che sia al secondo, com'è il primo al terzo (n. 256.) Imperochè la proporzione reciproca de' quattro termini a, b, c, x si cangi in diretta; sarà $a:c::x:b$, e perciò $ab = cx$, e $\frac{ab}{c} = x$, cioè il quarto richiesto è eguale al prodotto del primo nel secondo, diviso pel terzo.

Nell' istessa maniera si discorra, se la proporzione è continua, ove in vigor del sudetto principio si ha, che dati due termini si possa trovare il mezzo geometricamente proporzionale. Imperoche se dal prodotto degli estremi ab estraggasi la radice quadrata, $\sqrt{ab}$ sarà il mezzo proporzionale richiesto; poiche facendosi $\sqrt{ab} = x$, sarà $ab = xx$, e in consequenza $::a, x, b$. Così anche se a due dati a, b si voglia aggiunto il terzo geometricamente proporzionale, questo sarà il quotiente del quadrato del secondo diviso pel primo, cioè $\frac{bb}{a}$; poichè se pongasi $\frac{bb}{a} = d$, sarà in consequenza $bb = ad$; onde per la seconda parte del teorema II. $::a$, b, d.

CCLXXXVII.

CCLXXXVII. La regola poi del tre composta deriva dall a composizion delle ragioni (n. 234) e tutta si riduce a questo Problema: *Date che sieno le ragioni componenti una qualche ragion composta, e dato un de due termini d'un'altra qualunque ragione, che sia eguale alla data composta, trovare l'altro termine della medesima.* Prima però di risolverlo, e di applicarlo al caso nostro, non sarà fuor di proposito spiegare più accuratamente ciò che spetta alla composizion delle ragioni.

E prima d'ogni altro, perchè i Principianti non prendano equivoco circa la voce Composizion di ragione, si sappia che questa voce in due sensi molto diversi si adopera da Geometri; nel primo senso è quella, che si fa per addizione, come posta la ragione di $a:b$, il di cui esponente è $\frac{a}{b}$, la ragione, che *componendo* ne risulta, è $a+b:b$, e questa più propriamente si chiamerebbe addizion di ragioni; nel secondo senso è l'altra, di cui quì parliamo, e si fa per moltiplicazione, cioè o con moltiplicare gli esponenti delle date ragioni tra loro, o con moltiplicar gli stessi termini, con cui si esprimono le date

ra-

ragioni; nel primo modo la ragion composta si ha dal prodotto degli Esponenti, nel sesecondo dai prodotti di tutti gli antecedenti, e di tutt' i consequenti. L'uno, e l'altro modo è l'istesso, perchè la stessa ragion composta ne risulta; Per es. sieno date due ragioni di 4 : 2, e di 9 : 3, l'esponente della prima è 2, della seconda è 3; Or perchè $2 \times 3 = 6$, il 6 sarà l'esponente della ragion composta, la quale si avrà ancora, con moltiplicare gli antecedenti, cioè 4×9, e i consequenti 2×3; Onde la ragione di 36 : 6 è la composta delle date, che per esponente ha il 6. Similmente se l'esponente della ragione di $\frac{a}{b}$ sia m, e della ragione $\frac{c}{d}$ sia n, la ragione, il di cui esponente è mn, cioè il prodotto degli esponenenti dati, è la composta, la quale si può esprimere anche così $\frac{ac}{bd}$, cioè co' prodotti degli antecedenti, e de' consequenti, ch'è la stessa della prima; poichè la ragione $\frac{a}{b}$, o $a : b$ si può cangiare in questa $bm : b$ (n. 231.), e la ragione $\frac{c}{d}$, o $c : d$ in quest' altra $dn : d$, Onde la ragion composta per il secondo modo è $\frac{bdmn}{bd} = mn = \frac{ac}{bd}$

CCLXXXVIII.

CCLXXXVIII. Quindi si ha, e si dimostra il teor. fondamentale della composizion delle ragioni, ch'è questo. Se a due qualunque termini a, g si frappongono altri quantisivoglia mezzi comunque tra se comparati, cioè o costituiscono, a due a due ordinati, ragioni eguali, o le costituiscano ineguali, la ragion di quegli estremi $\frac{a}{g}$ si compone dalle ragioni intermedie continuamente prese, cioè di $a:b$, di $b:c$, e così degli altri fino all'ultimo g continuamente. Imperoche $\frac{a}{b} \times \frac{b}{c} \times \frac{c}{d} \times \frac{d}{e} \times \frac{e}{f} \times \frac{f}{g} = \frac{abcdef}{bcdefg} = \frac{a}{g}$; mentre i termini intermedj trovandosi tutti così sopra, come sotto l'interposta linea, si distruggono; onde rimangono soltanto il primo e l'ultimo, e val quanto dire, che l'esponente, o il denominatore della ragione di $a:g$ nasce da'sei esponenti delle sei ragioni intermedie. Sieno ne'numeri continuate quattro ragioni, cioè una tripla, una doppia, una sesquialtera, una sesquiterza, :: 36, 12, 6, 4, 3. La ragion del primo all'ultimo, ch'è dudecupla si compone dalle quattro ragioni intermedie, il di cui esponente è 12, ch'è il prodotto degli esponenti 3, 2, $1\frac{1}{2}$

e $\frac{1}{3}$ tra se moltiplicati.

CCLXXXIX. Per avere adunque la ragion composta di altre date componenti, oltre i due modi spiegati nel num. 287, vi ha un'altro modo dipendente da'detti, e di molto uso, perchè apre la strada alle costruzioni geometriche.

Si cerchi I. la ragion composta dalle due $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$. Si faccia $a:b::d:\frac{bd}{a}$, questo quarto proporzionale $\frac{bd}{a}$ si chiami p. Sarà $\frac{c}{p}$ la ragion composta dalle due $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$. Imperocchè nella serie c, d, p, la ragione $\frac{c}{p}$ è la composta dalle due $\frac{c}{d}$, $\frac{d}{p}$ (n. 288.) Ma per la costruzione $\frac{d}{p}=\frac{a}{b}$. Dunque $\frac{c}{p}$ è la ragion composta dalle due $\frac{c}{d}$, $\frac{a}{b}$.

Si cerchi 2. la ragion composta dalle tre $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{e}{f}$. Trovata, come prima, la ragione $\frac{c}{p}$ composta dalle due $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, le tre date si ridurranno a due $\frac{e}{f}$, $\frac{c}{p}$. Si faccia pertanto, come dianzi $e:f::p:\frac{pf}{e}=q$; la ragione

$\frac{c}{q}$ sa-

$\frac{c}{q}$ sarà la composta delle tre date per l'istesso raziocinio. E così se si voglia la ragion composta da quattro o più, sempre coll'istesso metodo, il quale oltre all'espression semplicissima, che dà della ragion composta (mentre in vece di esprimersi per $\frac{acei}{bdf}$, si esprime per $\frac{c}{q}$) fa dippiù, che tal semplicissima espressione si possa in varie guise sempre similissime variare, tra cui sia lecito sceglier quella, che più atta sembrerà alla soluzion del problema.

CCXC. Or affin di rimetterci nel nostro camino, per le cose dette si vede chiaro, altro non essere la regola del tre composta, che un corollario della composizion delle ragioni. Mi spiego con quest'esempio: Se scudi 2000 $= a$, nello spazio d'anni 3 $= c$ portano il lucro di sc. 100 $= e$; Sc. 8000 $= b$ nello spazio d'anni 12 $= d$, quanti sc. lucreranno? Si cerca il lucro incognito x, che agli sc. 100 abbia la ragion eguale alla composta ragione dalle due componenti 8000 : 2000, e 12 : 3. Perilche si dispongano i termini così.

$$2000 \times 3 : 8000 \times 12 :: 100 : x = 1600$$

$$a \quad c : \quad b \quad d :: e : x = \frac{bde}{ac}$$

CCXCI. Corollario anche della detta composizion di ragioni è la regola composta di Società, la quale a questo probl. si riduce: Dividere un dato numero n in un numero determinato di parti incognite, come in tre parti x, y, z, con tal condizione, che le ragioni di queste parti $\frac{x}{y}$, $\frac{y}{z}$ sieno eguali alle ragioni composte, le componenti delle quali sieno date, cioè $\frac{x}{y} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{e}$, e $\frac{y}{z} = \frac{b}{c} \times \frac{e}{f}$. Sicche per la suppozizione costa I., $x + y + z = n$. II. $x : y :: ad : be$, e $y : z :: be : cf$; quindi alternando, e invertendo $ad : x :: be : y :: cf : z$. Onde ne viene l'universale risoluzione, e la regola arimmetica

$$ad + bc + ef : n \left\{ \begin{array}{l} :: ad : \frac{adn}{ad+be+ef} \\ :: be : \frac{ben}{ad+be+ef} \\ :: ef : \frac{efn}{ad+be+ef} \end{array} \right.$$

CAPO V.

Delle Progressioni geometriche, e loro affezioni.

CCXCII. PEr le cose dette chiaro apparisce, che ad aversi la Progression geometrica, debbono i termini esser continua-

tinuamente proporzionali in geometrica proporzione in modo, che sempre per eguali ragioni procedano, cioè moltiplicandosi continuamente per l'esponente della comun ragione, il quale se è maggior di 1, fa la progressione crescente, se è minore di 1, la fa decrescente. Per esempio

Sieno $2 . 2\times2=4\times2=8\times2=16\times2=32$ &c.

$a . am . am^2 . am^3 . am^4 .$ &c.

overo $32 . 16 . 8 . 4 . 2$: cioè $\frac{32}{2}=16 . \frac{16}{2}=8$ &c.

$a . \frac{1}{2}a . \frac{1}{4}a . \frac{1}{8}a . \frac{1}{16}a$ &c.

Nelle due prime progressioni il comune esponente, o moltiplicatore è $2=m$, nell'altre due anch' è il 2, $=\frac{1}{2}a$, che si può anche esprimere per m, e trasformarsi la progressione in questa, $a . \frac{a}{m} . \frac{a}{m^2} . \frac{a}{m^3} . \frac{a}{m^4} . \frac{a}{m^5}$ &c. Ov'è da notarsi, che cominciando da un dato termine, come da a viene questo a moltiplicarsi, o a dividersi per la progression geometrica del suo esponente così

$$\begin{array}{l} a . a . a . a . a . a \\ 1 . m . m^2 . m^3 . m^4 . m^5 \\ \hline a . am . am^2 . am^3 . am^4 . am^5 . \end{array}$$

overo

overo $a . \frac{a}{m} . \frac{a}{m^2} . \frac{a}{m^3} . \frac{a}{m^4} . \frac{a}{m^5}$

CCXCIII. La Progressión geometrica tra tutte la più semplice, e la più naturale (come altrove si è detto) è quella, che comincia da 1, e allora il secondo termine è l'esponente della comun ragione, cioè $1^0 . a^1 . a^2 . a^3 . a^4$. &c. in cui li numeri affissi a' termini non solo indicano la potestà di essi, ma ancora la lor distanza dal primo; e perciò si chiamano esponenti della potestà, o indici della distanza, e anche logaritmi, i quali relativamente alla serie, che comincia da 1, cominciano da o, procedendo secondo la serie arimmetica 1, 2, 3, 4 &c, come diffusamente si spiegherà, trattandosi de' logaritmi. Queste cose così premesse passo alle principali affezioni della Progression geometrica, che parte son teoremi, e parte problemi, indistintamente proposti, e con accennarsene soltanto le dimostrazioni, per fuggir le lungherie. Riguardo a' simboli, di cui mi servirò, prendo a termine minimo, f termine massimo, il rettangolo degli estremi af, la ragione del massimo al minimo $\frac{f}{a}$, il numero de' termini n, il comune esponente m, la distanza di qualun-

que termine dal primo $d = n - 1$.

CCXCIV. I. Qualunque termine della progression geometrica ascendente moltiplicato per il comune esponente, dà il termine prossimamente maggiore; e pel medesimo diviso dà il termine prossimamente minore. Ciò è chiaro per la formola, con cui sopra si è espressa l' una e l' altra progressione (n. 292)

CCXCV. II. Dato il primo termine della progressione, e dippiù l' esponente comune, viene a formarsi la stessa progressione. Discende dalla precedente.

CCXCVI. III. Qualsivoglia termine della progressione ascendente è il prodotto del primo termine nella potestà del comun esponente, qual potestà abbia per indice la distanza dal primo o sia il numero de' termini meno 1, cioè $= am^d$, o am^{n-1}. Qualsivoglia termine poi della progression discendente è il quotiente del primo termine diviso per la potestà del comun esponente, l' indice della quale sia il numero de' termini meno uno, cioè $\frac{a}{m^d}$, o $\frac{a}{m^{n-1}}$. E' un corollario del detto nel Teor. 2. c. 2. Sez. 2. e della formola ivi esposta.

CCXCVII. IV. Dati nella progressione geometrica ascendente il primo termine a, il

comun' esponente m, la distanza del termine richiesto dal primo, si trova il richiesto, se si moltiplichi il primo per il comune esponente elevato alla potestà, il di cui esponente sia la distanza dal primo, o (ch' è lo stesso) il numero de' termini meno 1. Si voglia per es. il sesto termine della progressione ascendente, sarà questo $= am^d = am^{n-1} = am^5$.

Che se la progressione sia discendente, per aversi il richiesto, si divida il primo termine per il comune esponente elevato alla potestà, che abbia per esponente la distanza dal primo: Onde volendosi il termine sesto, sarà questo $= \frac{a}{m^d} = \frac{a}{m^{n-1}} = \frac{a}{m^5}$. Discende dal detto poch' anzi num. 296.

CCXCVIII. V. Dato un qualunque termine am^5, e data di qualunque altro minore z la distanza 2 dal dato, si trova il z, con dividere il dato per la potestà del comune esponente m, il di cui indice sia la data distanza 2; cioè sarà $z = \frac{am^5}{m^2} = am^3 = am^d$. Costa per il n. 292.

CCXCIX. VI. Due qualunque termini con due altri dell' istessa progressione posti in egual

distan-

diſtanza tra loro ſerbano l'iſteſſa proporzione. Diſcende dal precedente, poichè eſſendo la ragione del maggiore al minore $= m^d$, ſe in ambedue le ragioni sia comune così l'eſponente m, come la diſtanza d, ſaranno anche tra ſe eguali. Perilche nella ſerie delle continuamente proporzionali a^1, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6, a^7 &c, ſarà $a^1 : a^3 :: a^5 : a^7$, mentre $\frac{a^3}{a^1} = \frac{a^7}{a^5}$; e ſe si faccia $a . am . am^2 . am^3 . am^4 . am^5 . am^6$ &c. ſarà $a : am^2 :: am^4 : am^6$ &c.

CCC. VII. Se da quantisivoglia termini continuamente proporzionali, v. g. $:: a, b, c, d, e, f, g$, si prendano alcuni ad arbitrio coll' iſteſſa diſtanza tra loro, anche queſti ſaranno in progreſſion geometrica, come $:: a, c, e, g$, overo $:: b, d, f, h$ &c. Coſta pel precedente.

CCCI. VIII. Nella progreſſion geometrica $:: a, b, c, d, e, f$, data la comun ragione, o sia l'eſponente m, e 'l numero de' termini n, si trova la ragion degli eſtremi tra loro, cioè $\frac{f}{a}$, qual riſoluzione dipende dal n. 296., perchè $n - 1 = d$; onde $\frac{f}{a} = m^d = m^{n-1}$.

CCCII. IX. Data la ragion degli eſtremi

mi $\frac{f}{a}$ con la ragion comune m, si ha il numero de' termini n. Imperochè se $\frac{f}{a} = m^d$, sapendosi qual potestà di m è m^d, si sa anche la distanza degli estremi $d = n - 1$. Onde $n = d + 1$.

CCCIII. X. Dato il termine primo a con la ragion comune m, e 'l numero de' termini n, si ha anche l'ultimo f; poiche essendo $\frac{f}{a} = m^d$, sarà $f = am^d$. E quindi dato l'ultimo termine f con la ragion comune m, e il numero de' termini n, si ha il primo a; mentre essendo $m^d = \frac{f}{a}$, sarà $a = \frac{f}{m^d}$.

CCCIV. XI. In ogni progression geometrica il prodotto del primo nell'ultimo termine, o sia il rettangolo degli estremi è eguale al prodotto, o al rettangolo di due altri qualunque sieno egualmente distanti da' loro estremi; e se il numero de' termini sia dispari, il prodotto di due qualsivoglia termini, egualmente distanti dal mezzo, è eguale al quadrato del medesimo. Imperochè essendo $::$ a, b, c, d, e, f &c, sarà pel n. 300. $a : c :: d : f$, e in conseguenza $af = cd$; così anche per l'istesso $a : b :: e : f$, e però $af = be$ &c.

E se

E se l'esposta progressione si trasformi in questa $a \cdot am^1 \cdot am^2 \cdot am^3 \cdot am^4 \cdot am^5$ &c, sarà $a \times am^5 = am^1 \times am^4 = am^2 \times am^3$.

Per l'istessa ragione essendo $:: a, d, g, :: b, d, f, :: c, d, e$, sarà $ag = dd$, e $bf = dd$, e $ce = dd$.

Molte altre proposizioni simili all'enunciate ne' precedenti numeri si potrebbero esporre, ma si ommettono per amor della brevità, e perchè ognuno da se può ricavarle. Non sono però da tralasciarsi nè il teorema per trovare la somma di tutta la progressione senza la continua addizion degl' intermedj; e quindi qualunque termine anche l' ultimo senza riguardo agl' intermedj: nè que' teoremi, onde dipende la dottrina de'logaritmi da spiegarsi nell' appendice, e 'l calcolo esponenziale proposto nella Sez. 3. della parte 2. Sia per chiarezza maggiore il sequente

LEMMA

CCCV. Ne' termini continuamente proporzionali come ogni antecedente è al suo conseguente; così la somma di tutti gli antecedenti alla somma di tutti li conseguenti. Cioè

se::

ſe :: a, b, c, d &c, ſarà $\frac{a+b+c}{b+c+d}$, come $\frac{a}{b}$, overo $\frac{b}{c}$, o $\frac{c}{d}$.

Imperochè eſſendo $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}$, ſe ſi ponga $\frac{a}{b}=m$, ſarà anche (n. 230, e 231) $\frac{b}{c}=m$, e $\frac{c}{d}=m$; Onde $bm=a$, $cm=b$, e $dm=c$; quindi $bm+cm+dm=a+b+c$; e però $\frac{bm+cm+dm}{b+c+d}=\frac{a+b+c}{b+c+d}$. Ma $\frac{bm+cm+dm}{b+c+d}=m$; dunque $\frac{a+b+c}{b+c+d}=m$. Dunque eſſendo per l'ipoteſi anche $\frac{a}{b}=m$, ſarà $\frac{a+b+c}{b+c+d}=\frac{a}{b}$ &c.

CCCVI. *Corollario*. Ne' continuamente proporzionali a, b, c, d, e, f, de' quali a ſia il minimo, f il maſſimo, s la ſomma di tutti, ſarà $s-f$ il valore analitico di tutti gli antecedenti, $s-a$ di tutti conſequenti; e però per il Lemma $a:b::s-f:s-a$: Quindi ſi ha la ſomma di tutta la progreſſione. Poichè ſe $a:b::s-f:s-a$ ſarà $bs-bf=as-aa$, $bs-as=bf-aa$: e però $s=\frac{bf-aa}{b-a}$. Ne' numeri ſia :: 2, 4, 8, 16; Sara la ſomma di tutti $=\frac{4\times16-4}{4-2}=30$.

TEOREMA I.

CCCVII. Se dal prodotto del ſecondo nel maſ-

massimo, o ultimo sottraggasi il quadrato del primo, e'l residuo si divida per la differenza del secondo dal primo, il quotiente dà la somma della progressione. E' chiaro per il coroll. precedente.

CCCVIII. In maniera poco differente dall' esposta nel teor. si trova la detta somma, sostituendosi al primo, o minimo termine l'unità, e al secondo l'esponente della comun ragione, cioè m. Nella serie pertanto :: $a \,.\, am^1 \,.\, am^2 \,.\, am^3 \,.\, am^4$. &c, sarà $\frac{am^5 \times m-a}{m-1} = \frac{am^6-a}{m-1} = s$; poichè se la detta serie si trasformi nell'altra :: a, b, c, d, e, f, sarà, pel coroll. del lemma, $s-f : s-a :: 1 : m$; quindi $sm-fm = s-a$, e $sm-s = fm-a$; e però $s = \frac{fm-a}{m-1}$, come prima. Che se in vece di 1, e di m si ponga il primo a, e 'l secondo b, avrà luogo l'espressione analitica del teorema, cioè $\frac{am^6-aa}{am-a} = s$, com'è chiaro.

CCCIX. Il teorema, anche proposto secondo il num. precedente, serve di formola generale non solo a trovare la detta somma,

dati

dati che sieno il massimo termine f, il minimo a, e l'esponente comune m, cioè $s = \frac{fm-a}{m-1}$, ma anche a risolvere li seguenti problemi, ed altri a questi somiglianti, cioè a dire

I. Dati gli estremi f, a di qualunque progression geometrica, e data la somma di essa, si ha il comun' esponente m. Poiche se $s = \frac{fm-a}{m-1}$, sarà $m = \frac{s-a}{s-f}$

II. Dati il minimo termino a, il comun'esponente m, la somma di tutt'i termini s, si ha anche il massimo $f = \frac{\overline{s-a} \times \overline{m-1}}{m} + a$.

III. Dati, l'esponente comune m, la somma della progressione s, e'l massimo termine f, si ha anche il minimo $a = s + fm - sm$.

IV. Dati, il termine massimo f, l'esponente comune m, e la somma della progressione s, si ha il numero de' termini n; poichè pel preced. $a = fm + s - sm$; e però $\frac{f}{fm+s-sm} = \frac{f}{a} = m^d$ (n. 295.) Sicche si deve cercare, che potestà dell'esponente di m è eguale alla quantità $\frac{f}{fm+s-sm}$, poiche l'indice di tal potestà $+ 1$ è il numero richiesto de'termini, cioè $n = d + 1$.

Di questa fatta sono gli altri problemi, che

che si possono vedere presso il Vallis tomo 2. alg. c. 19, e che dalla diversa combinazion de' dati si possono facilmente ricavare, attese ancora le proposizioni di sopra dichiarate dal n. 294. sino al 304.

TEOREMA II.

CCCX. NE' termini continuamente proporzionali, che non cominciano dall' unità, come ne' termini $\because a \,.\, am^1 \,.\, am^2 \,.\, am^3 \,.\, am^4$ &c. se due tra se si moltiplichino, e 'l prodotto si divida pe 'l primo; e se più di due tra se si moltiplichino, e 'l prodotto si divida per la potestà del primo, minore d' un grado solo del numero de' termini: nell'uno e nell' altro caso s' avià per quotiente un termine, il di cui esponente, o sia la distanza dal primo sarà eguale alla somma degli esponenti di tutti li termini.

Sia per il primo caso de' due termini tra se moltiplicati l' esponente del primo 2, del secondo 3; saranno pertanto detti termini am^2, am^3, e 'l lor prodotto $aam^{2+3} = aam^5$, che diviso per a dà am^5, cioè un termine, il di cui esponente è 5, eguale alla somma degli esponenti de' termini moltiplicati, cioè $= 2 + 3$.

Sie=

Sieno pel secondo caso di tre termini qualunque continuamente moltiplicati gli esponenti r, s, t; saranno perciò i termini am^r am^s, am^t, e 'l lor prodotto $a^3 m^{r+s+t}$, qual prodotto se dividasi per la potestà seconda di a, cioè per a^2, s' avrà il quotiente am^{r+s+t}, il di cui esponente è la somma de' dati esponenti.

CCCXI. *Corollario* I. Quindi se i termini continuamente proporzionali cominciano da 1, cioè se sieno $1^0 . a^1 . a^2 . a^3 . a^4$ &c, da due di essi, o più tra se moltiplicati, ne proverrà un termine, il di cui esponente sarà eguale alla somma degli esponenti di essi. E' chiaro, perchè quì non fa duopo di divisione da farsi pel primo termine, come ne' due casi del teorema, essendo il primo termine quì $= 1$.

CCCXII. *Corollario* II. In ogni pregressione geometrica, che ha per principio l'unità, gli esponenti de' dati termini, cioè i loro logaritmi insieme uniti sono eguali all' esponente, o logaritmo del prodotto di essi; per es. $a^2 \times a^3 = a^5$; perchè i logaritmi sono gl' indici delle quantità continuamente proporzionali in proporzion geometrica, che cominciano da 1.

TEO-

TEOREMA III.

CCCXIII. Se la progressiom geometrica comincia dall'unità, e la progressione arimmetica degli esponenti dal zero, il quotiente d'un termine per un'altro qualunque diviso sarà il termine, il di cui esponente sia eguale alla differenza de' dati esponenti. Costa dal detto nel c. 3. E in vero nella serie $1^o . a^1 . a^2 . a^3 . a^4 . a^5$. &c. perchè la progressione geometrica comincia da 1, e l'arimmetica degli esponenti da o, ne viene,

che $\frac{a^5}{a^2} = a^{5-2} = a^3$, ch' è la divisione logaritmica delle potestà.

CCCXIV. *Corollario* I. Quindi se un termine minore d'una data progressione si voglia diviso per un maggiore, come $\frac{a^3}{a^6}$, l'indice del quotiente sarà negativo, cioè $a^{3-6} = a^{-3}$. Onde perchè dividendosi a^o per a^1, l'esponente è $o - 1 = - 1$, ed il quotiente a^{-1}; e dividendosi a^{-1} per a^1; l'esponente è $- 1 - 1 = - 2$, ed il quotiente a^{-2}; e ulteriormente dividendosi a^{-2} per a^1 l'esponente è

$-2-1=-3$, ed il il quotiente a^{-3}; se coll' istesso metodo si vada innanzi, si formerà la serie delle potestà, che si dicono negative, gli esponenti delle quali formino una progressione arimmetica di numeri naturali, come si è spiegato nel calcolo esponenziale (n. 91.)

CCCXV. *Corollario* II. Ma poiche $a^0=1$ (n. 92.) se in vece di a^0 si ponga 1, e l'unità si divida per a^1, il quotiente $\frac{1}{a^1}$ sarà $= a^{-1}$; e se $\frac{1}{a}$ si divida per a^1, il quotiente sarà $\frac{1}{a^2}=a^{-2}$, e se $\frac{1}{a^2}$ si divida per a^1, il quotiente sarà $\frac{1}{a^3}=a^{-3}$ &c. Onde nell' una e nell' altra maniera si possono esprimere le potestà dette negative, le quali in realtà non sono che frazioni, il di cui numeratore è sempre l' unità, e i denominatori sono le stesse potestà considerate come positive.

TEOREMA IV.

CCCXVI. IN qualunque progression geometrica il primo termine è al quarto, come il cubo del primo al cubo del secon-

condo ; e universalmente nella serie :: $a . b . c . d . e$ &c. la ragione $\frac{m}{x}$, cioè d' un termine, che chiamo m ad un' altro, che chiamo x: se tra essi un solo termine s' interpone, sarà eguale alla ragion de' quadrati di due termini, che immediatamente si sieguono, cioè $\frac{m}{x} = \frac{a^2}{b^2}$; Se due termini s'interpongono, sarà eguale alla ragion de' cubi $\frac{a^3}{b^3}$, se quattro, $= \frac{a^4}{b^4}$; e in genere disegnando n un numero qualunque di termini, che tra due m, x s'interpongono, s'avrà $\frac{m}{x} = \frac{a^{n+1}}{b^{n+1}}$. Imperochè $\frac{m}{x}$ è una ragion composta di tante componenti tra se eguali, quante unità contiene il numero de' termini interposti, più uno. E nel vero in questa serie :: $a . am^1 . am^2 . am^3 . am^4$ &c. egli è evidente, essere $a : am^2 :: a^2 : a^2 m^2$, mentre l' istesso è l' esponente m^2 di ambedue le ragioni. Similmente $a : am^3 :: a^3 : a^3 m^3$, ov' è anche l' istesso esponente m^3.

CCCXVII. *Corollario* I. Quindi deriva l'elevazion delle potestà, come si è detto nel c. I. della Sez. III. p. I. Sicche della potestà a^2 il

X 2 qua-

quadrato è $a^2 \times a^2 = a^{2+2} = a^4$; e 'l cubo è $a^2 \times a^2 \times a^2 = a^{2+2+2} = a^{2 \times 3} = a^6$. Così della potestà a^3 il quadrato è $= a^{3+3} = a^{3 \times 2} = a^6$, e 'l cubo è $a^3 \times a^3 \times a^3 = a^{3+3+3} = a^{3 \times 3} = a^9$ &c.

CCCXVIII. *Corollario* II. Deriva anche l'origine de' logaritmi, o (ch'è lo stesso) degli esponenti delle potestà; mentre il doppio del logaritmo d'una data potestà adegua l'esponente del suo quadrato, il triplo di quello adegua l'esponente del suo cubo, e così degli altri.

CCCXIX. *Corollario* III. Si ha ancora l'origine delle potestà, che chiamano imperfette, e sono realmente radici delle potestà. Sicchè della potestà a^{12} la radice quadrata è $a^{\frac{12}{2}} = a^6$, la cubica è $a^{\frac{12}{3}} = a^4$, la quadrato-quadrata è $a^{\frac{12}{4}} = a^3$ &c. Così anche della potestà a^{-12} la radice quadrata è a^{-6}, la cubica è a^{-4}, la quadrato-quadrata a^{-3} &c. Le prime si chiamano Potestà imperfette positive; le altre imperfette negative; ed ambedue formano, come si è detto a suo luogo, disposte in ordine progressioni geometriche, mentre i loro esponenti son sempre in progressione aritmetica.

CAPO VI.

La proporzione, e progressione armonica.

CCCXX. DAlle proporzioni, e progressioni già spiegare, arimmetica, e geometrica pare, che derivi un' altra sorte di proporzione, e progressione, che Armonica fù detta dagli antichi, perchè s' applica alle principali proprietà della musical consonanza.

La proporzione armonica può aversi tra trè, o quattro quantità, cioè nel primo caso, quando di tre date quantità la prima è allà terza, come la differenza tra la prima e seconda alla differenza tra la seconda e terza; per es. dati tre termini a, b, c, $a : c :: a - b : b - c$: ne' numeri 6, 4, 3 vi ha proporzione armonica, essendo $6 : 3 :: 6 - 4 : 4 - 3$, perchè dell'una e dell'altra ragione l' esponente è 2, benchè essi numeri nè hanno tra se la stessa differenza, nè la stessa ragione, com' è manifesto. Così anche 7, 12, 42, perchè $12 - 7 : 42 - 12 :: 7 : 42$.

CCCXXI. Nel secondo caso si ha la proporzione armonica tra questi quattro termini, a, b, c, d, se $a : d :: a - b : c - d$. Così ne' nume-

meri 30, 18, 14, 10, ſe 30 : 10 :: 30 — 18
14 — 10, perchè l'una e l'altra ragione è tripla.

CCCXXII. La Progreſſione armonica ſi ha quando la ſteſſa proporzione ſi continua oltre i trè termini, o all'insù aſcendendo a quantità maggiori, o all'ingiù diſcendendo alle minori; ma in modo, che i primi tre ſiano armonicamente proporzionali, indi laſciato il primo, li trè ſequenti, e poi laſciati li due primi gli altri tre, e così in avanti. Ov' è da oſſervarſi, che in tal continuazione mai non ſarà, che tra gli eſtremi de' primi tre v' abbia la ſteſſa proporzione, che tra gli eſtremi degli altri tre, come ne' numeri 3, 4, 6, 12, vi ha continuata la proporzione armonica, perchè così li tre primi 3, 4, 6, come gli altri tre, laſciato il primo, 4, 6, 12 ſono armonicamente proporzionali, ma gli eſtremi 3 e 6 de' primi hanno trà ſe la proporzione dupla, gli altri eſtremi 4 e 12 hanno la tripla. Il metodo di continuar queſta proporzione così all'insù, come all'ingiù, e 'l metodo anche di trovar la proporzione armonica, ſi dà ne' ſeguenti problemi.

CCCXXIII. Per dare ora un ſaggio del come la proporzione armonica eſprime le proprietà delle conſonanze muſicali, prendo li trè

nu-

numeri 6, 4, 3, armonicamente proporzionali; e trovo, che tra 6 e 4 vi è la ragion sesquialtera, che fa la consonanza detta la *Quinta* (*Diapente*); e tra 4 e 3 vi è la ragion sesquiterza, che fà la consonanza chiamata la *Quarta* (*Diatesseron*); finalmente trà 6 e 3 la dupla, che fà la consonanza chiamata *l'Ottava* (*Diapason*). Dell' istessa maniera si trovano queste, ed altre consonanze in altri numeri armonicamente proporzionali. Anzi, come nota il P. Clavio (*lib.* 5. *Geom. elem.*) nel Cubo solido si trovano quattro termini in continua proporzione armonica, che variamente tra se comparati esprimono le principali consonanze musicali. Peroche in esso sono basi quadrate 6, lati 12, angoli solidi 8, e angoli piani 24. or questi numeri 6, 8, 12, 24 sono in progressione armonica; e la proporzione di 8 a 6 è sesquiterza, che compete alla *Quarta*, la proporzione di 12 a 8 è sesquialtera, che compete alla *Quinta*; la proporzione di 12 a 6, o di 24 a 12 è dupla, propria dell' *Ottava*; quella di 24 a 8 è tripla propria della *Duodecima*; e finalmente quella di 24 a 6 è quadrupla propria della *Decimaquinta* consonanza.

PROBLEMA I.

CCCXXIV. DA tre numeri aritmeticamente proporzionali ricavarne tre altri, che sieno in proporzione armonica.

Risol. Il primo de' tre dati si moltiplichi prima pel secondo, e poi per il terzo; indi il secondo anche per il terzo, i tre prodotti saranno armonicamente proporzionali, com'è da vedersi ne' sequenti esempj.

Propor.			
Aritm.	1.2.3.	4. 6. 8.	4. 7.10.
Armon.	2.3.6.	24.32.48.	28.40.70.

$$a.\ b.\ c.$$
$$ab.\ ac.\ bc.$$

Dimostro adunque, che i prodotti dell' ultimo Es., cioè ab, ac, bc sieno armonicamente proporzionali, cioè $ab - ac : ac - bc :: ab : bc$. Imperoche essendo ∴ $a.\ b.\ c$, sarà $a + c = 2b$ (n. 193) Perilche se l'una e l'altra parte dell' equazione si moltiplichi per la stessa quantità abc, sarà $aabc + abcc = 2abbc$; e pero $aabc - abbc = abbc - abcc$, e val quanto dire il prodotto degli estremi $\overline{ab - ac} \times bc =$

al

al prodotto de' mezzi $\overline{ab-bc} \times ab$. Dunque $ab - ac : ac - bc :: ab : bc$. Il che dovea dimostrarsi.

CCCXXV. *Corollario I.* I tre termini armonicamente proporzionali presi a due a due sono proporzionali ai tre termini della proporzione arimmetica, donde sono nati, ma con ordine inverso presi anche a due a due, cioè $ab : ac :: b : c$, ed $ac : bc :: a : b$.

CCCXXVI. *Corollario II.* Vicendevolmente se il primo numero dell'armonica proporzionalità si moltiplichi pel secondo, e poi per il terzo, e'l secondo per il terzo, i prodotti $aabc$, $abbc$, $abcc$ saranno aritmeticamente proporzionali. Così dall'armonica 2. 3. 6. proviene l'arimmetica 6. 12. 18.

PROBLEMA II.

CCCXXVII. Rinvenire tre termini armonicamente proporzionali, gli estremi de' quali, e le differenze abbiano la data proporzione.

Risol. e Dimostraz. Si prendano a libito due termini nella data proporzione, tra quali si trovi il mezzo aritmeticamente propor-

zio-

zionale (n. 196.); indi pel preced. Probl. da questi tre si ricavino altri tre in proporzione armonica: Questi saranno i richiesti. Come se si cerchino tre, gli estremi de' quali abbiano la ragione di $a:c$, si trovi il mezzo aritmeticamente proporzionale b. Pe'l preced. da questi tre ∴ $a.b.c$ proverranno in armonica proporzione $ab.\ ac.\ bc$, gli estremi de quali hanno la data ragiona di $a.c$.

CCCXXVIII. *Corollario*. Se un dato numero dividesi per altri aritmeticamente proporzionali, li quotienti formeranno una progressione armonica. Per es. se il num. 60 si divida pe' numeri aritmeticamente proporzionali 1, 2, 3, 4, 5 &c., i quotienti 60, 30, 20, 15, 12 formano una serie in progressione armonica. Perchè

$$60 : 20 :: 60 - 30 : 30 - 20$$
$$30 : 15 :: 30 - 20 : 20 - 15$$
$$20 : 12 :: 20 - 15 : 15 - 12$$

PROBLEMA III.

CCCXXIX. Dati due termini a, b, trovare il terzo x armonicamente proporzionale.

Risol.

Risol. e Dimostraz. Il primo caso è, quando la proporzione è crescente, allora sarà $a : x :: b - a : x - b$ (n. 320.) e però $ax - ab = bx - ax$: e riducendo, s'avrà $x = \frac{ab}{2a - b}$: Dunque saranno armonicamente proporzionali a. b. $\frac{ab}{2a - b}$ in vigore dell'equazione trovata; e la detta quantità $\frac{ab}{2a - b}$ è la formola generale per qualunque terzo armonicamente proporzionale ad altri due dati. Così se $a = 10$, $b = 16$, sarà $x = \frac{160}{20 - 16} = \frac{160}{4} = 40$. E' da avvertire però per la stessa equazione, che ove il secondo termine b o eccede il doppio del primo, cioè $2a$, o è a quello eguale, il Problema affatto non si può risolvere.

Il secondo caso è, quando la proporzione è decrescente, allora s'avrà $a : x :: a - b : b - x$; onde come nel primo caso sarà anche in questo $x = \frac{ab}{2a - b}$, e la poporzione armonica $a . b . \frac{ab}{2a - b}$. Sia $a = 6$, $b = 3$, sarà dunque $x = \frac{6 \times 3}{12 - 3} = 2$. Sicche per l'uno e l'al-

easi si troverà $x = \frac{2ab}{a+b}$; perilche i termini $a . \frac{2ab}{a+b} . b$ saranno armonicamente proporzionali. Che se i detti termini all' istesso denominatore si riducano, con prendere i soli numeratori, vi sarà anche la proporzione armonica $a^2 + ab . 2ab . ab + b^2$. Sicche se $a = 2$, $b = 3$, il mezzo armonicamente proporzionale $\frac{2ab}{a+b} = \frac{4 \times 2 \times 3}{2+3} = \frac{12}{5}$; e però $2 . \frac{12}{5} . 3$ overo, riducendo i termini all'istesso denominatore, 10 . 12 . 15 armonicamente proporzionali.

CCCXXXII. Ma vi è un'altra proporzione in questo genere, che si chiama *Contrarmonica*, di cui basta accennarne la nozione, per essere raro l'uso, che se ne fa nella matematica. Pertanto la proporzione *Comtrarmonica* si ha, quando la differenza del primo e del secondo termine è alla differenza del secondo, e terzo, come il terzo è al primo. Overo, avendosi quattro termini, quando la differenza tra il primo e secondo e alla differenza tra il terzo e 'l quarto, come il quarto è al primo. E se i termini del primo caso si vanno continuando, allora s' avrà la progressione

Con-

Contrarmonica. I problemi ad essa attenenti, cioè de' modi di trovare o il terzo, dati che sieno due, o il mezzo contrarmonicamente proporzionale, si possono facilmente risolvere per le cose dette ne' Problemi precedenti. Il che basti aver detto sopra la dottrina delle Proporzioni così in generale, come in particolare.

APPENDICE

De' Logaritmi, e del loro uso.

CCCXXXIII. NON è quì mio pensiero spiegar per minuto il canone de' Logaritmi, e tutti gli usi, che se ne fanno. Sarebbe questo un trattato a parte, e necessario per la trigonometria. Ne dirò quanto basta per gli usi dell'arimmetica; perchè i Logaritmi sono a buon conto numeri artificiali sostituiti agli ordinarj numeri, per cangiare tutte le specie di moltiplicazione in addizioni, e tutte le specie di divisione in sottrazione. L'inventore de' Logaritmi fù il famoso Gio: Neper gentiluomo Scozzese, che ne stabilì il canone, e ne formò le tavole, perfezionate poi da' rinomati Arrigo Briggio, Adriano Ulacco, e da altri.

CCCXXXIV. I Logaritmi sono numeri aritmeticamente proporzionali, corrispondenti ad altri numeri, di cui sono logaritmi, e che serbano tra se la geometrica proporzione,

Sie-

Sieno per es. i numeri nella serie *A* geometricamente proporzionali, che egualmente si contengono; a questi corrispondano altri in altre serie diverse *B*1, *B*2 &c. aritmeticamente proporzionali, cioè con egual differenza fra se, o crescendo sempre, o decrescendo

A	*B*1	*B*2	*B*3	*B*4
1	0	0	1	32
2	1	$1\frac{1}{3}$	3	28
4	2	$2\frac{2}{3}$	5	24
8	3	4	7	20
16	4	$5\frac{1}{3}$	9	16
32	5	$6\frac{2}{3}$	11	12
64	6	8	13	8
128	7	$9\frac{1}{3}$	15	4
256	8	10	17	0

I numeri nelle serie *B* si dicono i logaritmi della serie *A*: Onde si vede, che i logaritmi possono a libito assumersi, purchè, determinata, che sia una volta la differenza, si mantenga in tutta la progressione costante in maniera, che se il logaritmo dell'unità della

la ſerie *A* ſia 1, e del binario ſia 3, come nella ſerie *B*3, di neceſſità il logaritmo di 4 ſarà 5, di 8 ſarà 7, e così de' rimanenti; e ſe il logaritmo dell' unità è 32, e del binario è 28 decreſcendo, come nella ſarie *B*4, ſarà il log. di 4 il 24, e di 8 il 20 &c.

CCCXXXV. Sebbene però la forma de logaritmi è arbitraria, la più uſata però, e la più idonea agli uſi è quella, che comincia da zero, ſicchè il log. di 1 ſia 0, come ſi è detto nel calcolo degli eſponenti, e ſi vede fatto nella ſerie *B*1. E in vero ſiccome alle poteſtà, che ſono quantità geometricamente proporzionali, cominciando da 1, ſi adattano gli eſponenti, che ſieno aritmeticamente proporzionali, cominciando dal zero; così nelle tavole logaritmiche a' numeri in progreſſione geometrica corriſpondono numeri in progreſſione aritmetica; ſicchè ſtabilita per la geometrica la proporzion decupla 1, 10, 100 &c. come nell' anneſſa tavola, ſi fanno corriſpondere i numeri in arimmetica progreſſione, che dal zero cominciando, differiſcano tra ſe per 10000000.

Prog. geom.	*Prog. aritm.*
1	0
10	10000000
100	20000000
1000	30000000
10000	40000000

CCCXXXVI.

CCCXXXVI. La ragione poi, per cui dagl' inventori de' logaritmi sienſi pe' termini dell' aritmetica progreſſione aſſignati numeri, che con tanto eceſſo ſi ſuperano, ella è, perchè in qualunque ſerie geometrica mancando molti numeri intermedj, de' quali poſſiamo nelle noſtre operazioni abbiſognare, perciò i logaritmi applicati a qualunque ſerie geometrica, debbono aver tra ſe una differenza grandiſſima, per poterſi aſſignare anche agl' intermedj li ſuoi logaritmi ſenza frazione. Mi ſpiego: formino una ſerie aritmetica i numeri naturali 1, 2, 3, 4, 5 &c., e corriſpondano a numeri geometricamente proporzionali 1, 2, 4, 8, 16 &c. Or eſſendo 1 log. dell' unità, 2 del binario, 3 del quaternario, quì già manca il log. del ternario, come anche mancano i log. de' nnmeri 5, 6, 7, 9, 11, 12, 13, 14, 15 &c. Onde il canone logaritmico ſarebbe molto mancante, perchè qualora occorreſſero numeri di tal fatta, ceſſerebbe ogni uſo de' logaritmi. Laddove poſto per log. dell' unità 0, e per log. del binario 10000000, del quaternario 20000000: ovvero del denario 10000000, del centenario 20000000, e così degli altri, come nella tav. di ſopra eſpoſta, già molti logaritmi pe' nu-

meri intermedj abbondano, senza ricorrere a frazioni.

CCCXXXVII. I Logaritmi dell'uno, e del diece si dicono log. *radicali*, per esser come le radici degli altri, e stabiliti che sieno, servono di regola a'logaritmi degli altri proporzionali, serbando eguale l'accrescimento. Il perchè, essendo la proporzione di 100 ad 1 duplicata della proporzione di 10 ad 1, e quella di 1000 ad 1 triplicata della medesima di 10 ad 1, il log. di 100 debb'esser doppio del log. di 10, e quello di 1000 triplo di quello di 10, come costa dalla tavola posta nel n. 335. Il log. però di 10 non è presso tutti gli Autori l'istesso; a me col comune de'moderni piace di metterlo=1. 0000000. Ed è da osservarsi, che la prima nota de'logaritmi è puntata, cioè si distingue dall'altre col punto, e si chiama la *caratteristica*, o l'*indicativa*, perchè indica di quante note numeriche costi l'intiero, di cui ella è logaritmo, essendo sempre la *caratteristica* d'una nota meno del numero intiero, cui corrispponde. Quindi è, che i logaritmi de numeri da 1 sino a 9 hanno per *caratteristica* 0, da 10 a 99 hanno 1, da 100 sino a 199 hanno 2, e così de' rimanenti. Sicchè dato qualunque nume-

numero intiero, per es. 2943, subito costa, che al logaritmo di esso competono tre note per *caratteristica*.

CCCXXXVIII. Il determinare i logaritmi de' numeri in proporzion declupa, come nella tavola del n. 335, o in altra qualunque proporzione non porta seco alcuna difficultà, com' è chiaro per le cose dette. Il difficile si è stenderli a' numeri anche interposti, e quest' è lo scopo dell' artifizio, con cui si costruiscono le tavole Logaritmiche, cioè il ritrovare i Logaritmi de' numeri frapposti trà 1 e 10, trà 10 e 100, trà 100 e 1000 &c. Ma perchè questa è fatiga già fatta dagli Autori sovralodati (n. 333), e 'l dare il metodo di costruir queste tavole sarebbe un andar troppo in lungo, e forse anche fuor di strada, perciò mi contento di soggiungere al fine di questa sezione le tavole Logaritmiche de' numeri computati da 1 fino a 900; e dopo avere adattate a' Logaritmi le proprietà de' numeri in progressione aritmetica, spiegate ne' capi precedenti, inferirne gli usi principali per le operazioni Aritmetiche.

TEOREMA VIII.

CCCXXXIX. SE si diano quattro numeri geometricamente propor-

zionali, come nella tavola sottoposta i numeri *A*, *B*, *C*, *D*: la somma de' log. *E*, *H* degli estremi *A*, *D* è eguale alla somma de' log. *F*, *G* de' termini di mezzo *B*, *C*. E se fieno tre numeri geometricamente proporzionali *P*, *C*, *D*, la somma de' log. *Q*, *H*, degli estremi *P*, *D* è doppia del log. *G* del mezzo *C*; e per l'opposito &c.

La dimostrazione del Teorema si deduce dal Teor. I., e III. per essere i logaritmi secondo la lor definizione (n. 334.) aritmeticamente proporzionali. La seconda parte anche rimane dimostrata per gl' istessi. Che se per l'opposito la somma degli estremi *E*, *H* sia eguale alla somma de' mezzi *F*, *G*, si dimostra per l'istessa ragione, essere i numeri *A*, *B*, *C*, *D* geometricamente proporzionali; imperochè pel Teor. II. i log. *E*, *F*, *G*, *H* sono aritmeticamente proporzionali: onde per la loro definizione i num. *A*, *B*, *C*, *D* geometricamente proporzionali.

	1	00000	
A	10	10000	*E*
B	100	20000	*F*
P	1000	30000	*Q*
C	10000	40000	*G*
D	100000	50000	*H*

CCCXL. *Corollario* I. Dati tre num. geometricamente proporzionali si ha il quarto in-

indipendentemente dalla regola del Tre, di cui si è parlato ne' capi precedenti, col solo uso de' logaritmi; poiche basterà dalla somma de' log. del secondo e terzo numero dato sottrarre il log. del primo: sieno i dati numeri B, C, D e i log di essi G, H, I. Dalla somma de' log. H, I, cioè da 7. si sottragga il log. G 2, il residuo 5 sarà il log. L del quarto proporzionale E. Dell' istessa maniera di tre geometricamente proporzionali dati due si trova il terzo. Sieno i due dati B, C, i log. de' quali sono G, H, dal log. H raddoppiato si tolga il log. G, cioè da 6 si tolga 2, rimane il log. I 4 del numero D, ch'è il terzo geometricamente proporzionale. E finalmente volendosi il mezzo C, la somma de' log. G, I degli estremi B, D si divida per 2, sarà $\frac{6}{2} = 3$ log. di C 8, ch'è mezzo proporzionale tra 4, e 16.

	1	0	
A	2	1	F
B	4	2	G
C	8	3	H
D	16	4	I
E	32	5	L
M	64	6	N

CCCXLI. *Corollario* II. Quando il log. dell' unità è zero, la somma de' log. G, H de' fattori B, C è eguale al log. L del prodotto E. Peroche essendo per la natura della moltiplicazione l' unità al moltiplicatore, come il

 molti-

moltiplicando al prodotto, saranno per le leggi della proporzione l'unità, e i numeri *B*, *C*, *E* geometricamente proporzionali, e i loro log. per la definizione di essi, in proporzione aritmetica: onde pel Teor. I. la somma de' log. *G*, *H* è eguale alla somma de' log. *L*, e dell'unità. Ma il log. dell'unità quì è o. Dunque quella somma è eguale al solo log. *L*, cioè del prodotto *E*. Che se il log. dell'unità fosse un qualche numero, allora dalla somma de' log. de' Fattori dovrebbe sottrarsi il log. dell'unità, perchè si abbia il log. del prodotto.

CCCXLII. *Corollario* III. Essendo il log. dell'unità o, il log. *F* di qualsivoglia num. *A* raddoppiato fa il log. *G* del quadrato di *A*, ch'è *B*, triplicato fa il log. *H* del cubo *C* dell'istesso *A*, e così nelle altre potestà. Segue dal precedente, poiche il duplicare il log. *F* essendo l'istesso, che metterlo due volte (onde ne nasce il log. *G* del numero *B*) sarà il numero *B* il prodotto di *A* in se stesso; mentre così la somma de' log. de' fattori è eguale pel precedente al log. del prodotto. Dunque *B* è il quadrato di *A*. Or ponendosi il log. *G* doppio del log. *F*, saranno i log. *F*, e *G* insieme uniti tripli del solo log. *F*, onde

si

ſi fa il log. *H*, che per l'ipoteſi è triplo di *F*; perilche il numero *C*, di cui *H* è log., naſce dal prodotto di *A* in *B*, cioè della radice nel ſuo quadrato, e perciò *C* è il cubo di *A* &c.

CCCXLIII. *Corollario* IV. Poſto il log. del l'unità o, il log *L* del numero dividendo *E* e eguale a' log. *G*, *H* inſieme uniti de' diviſore *B*, e del quotiente *C*. Perochè eſſendo per la natura della Diviſione l'unità al quotiente, come il diviſore al dividendo, saranno l'unità, e i numeri *C*, *B*, *E* geometricamente proporzionali, e i loro log. cioè o, *H*, *G*, *L* aritmeticamente proporzionali; e in conſequenza pel Teor. I. la ſomma de' log. o, *L* cioè il ſolo log. *L* è eguale alla ſomma de' log. *G*, *H*.

CCCXLIV. *Corollario* V. Eſſendo il log. dell'unità o, ſe di qualunque numero *M* il log. *N* ſi divida per 2, cioè ſe ne prenda la metà, queſta sarà *H* log. della radice quadrata *C*; e ſe ſi divida per 3, cioè ſe ne prenda il terzo, queſto sarà *G* log. della radice cubica *B* dell'iſteſſo numero *M*. Imperochè il log. *H* duplicato fa per l'ipoteſi il log. *N*. Dunque pel Coroll. III. *M* è il quadrato del numero *B*, cioè *B* è radice quadrata del numero *M*. Nell'iſteſſa maniera il log. *G* tri-

plicato fa il log. *N*; e in conseguenza il numero *B* è radice cubica del numero *M*. E così in avanti se il log. di qualunque numero si divida per 4, per 5, per 6 &c. ne verrà il log. della radice dell' istesso numero, denominata da quella potestà, il di cui esponente fù assunto per divisore.

Usi de' Logaritmi nell' operazioni Aritmetiche.

CCCXLV. DAgli esposti Corollarj dipendono gli usi citati. E I. *nella moltiplicazione*: Se due numeri si vogliano moltiplicati insieme, si trovino i loro log., e insieme si sommino; la somma dà il log. del prodotto (n. 341.) Per es. si abbia da moltiplicare 23 per 9; i loro log. trovati nelle tavole sono 1. 3617278, e 0. 9542425; la somma è 2. 3159703, ch' è il log. del numero 207., e quest' appunto è il prodotto di 23 in 9.

II. *Nella divisione*: Dal log. del dividendo tolto il log. del divisore, il resto è il log. del quotiente (n. 343.). Sia il dividendo 224, il divisore 8. Dal log. del primo 2.3502480 sottratto il log. del secondo 0. 9030900, si ha il residuo 1. 4471580, ch' è il log di 28. Dunque 28 è il quotiente di 224. diviso per 8.

Che

Che se il residuo d'un log. sottratto dall'altro non si trovasse nelle tavole, ciò è segno, non essere il numero dato maggiore esattamente divisibile, e allora si prenda il log. prossimamente minore del residuo, e a canto al detto log. si troverà il quotiente.

III. *Nella formazion delle potestà*: Se qualche numero debba farsi quadrato, o cubo, il log. di esso duplicato, o triplicato darà il log. del chiesto quadrato, o cubo, (n. 342) Volendosi per es. il quadrato di 16, il log. di esso 1. 2041200 raddoppiato fa 2. 4082400, che trovato nelle tavole corrisponde al 256, il qual numero è il quadrato di 16; e 'l med. triplicato dà il log. 3. 6123600. del numero 4096, ch'è il cubo di 16.

IV. *Nell' estrazion delle radici*: Se d' un numero qualunque si cerchi la radice quadradrata, cubica &c.. la metà, o la terza parte &c. del log. del proposto numero darà il log. della chiesta radice (n. 344) Per es. si cerchi la radice quadrata di 784; il log. di tal numero, ch'è 2. 8943160 diviso per 2, si hà 1. 4471580, log. di 28; onde 28 è la radice quadrata di 784. Così la radice cubica di 64 si ha, con dividere per 3 il log. di 64, ch'è 1. 8061800, di cui la terza parte è 0.

6020600

6020600, che nelle tavole si trova essere log. di 4; e perciò 4. è la radice cubica di 64.

Devo avvertire però, che le tavole de log. poste quì dietro sono de' numeri da 1 sino a 900, non già sino a 10000, o anche a 100000, come soglion farsi ne' libri, che trattano exprofesso di esse. Ma perchè si sappiano trovare nelle nostre tavole i log. non solo de numeri, che non passano 900, ma anche degli altri che sono maggiori, e perciò dalle tavole non compresi, soggiungo a tal fine i seguenti

Usi delle tavole logaritmiche.

CCCXLVI. Probl. IX. D'un dato qualunque numero, che non ecceda il massimo delle tavole, cioè 900, rinvenire il logaritmo.

Tre casi ponno accadere: O che il numero dato sia un' intiero, o che sia un rotto, o che sia misto d' intiero, e di rotto. Se è un'intiero, e minore di quello, a cui le tavole si stendono, egli si cerchi in una delle colonne sotto la lettera *N*, e trovato che sia, a destra dirimpetto, e nell'istessa riga gli corrisponde il suo log. Così del numero 42 si troverà il log. 1. 6232493, e di 150 il log. 2. 1760913 &c. Se sia un rotto, di cui il numeratore, e 'l denominatore non eccedano

900,

900, si cerchino nelle tavole i log. dell' uno, e dell'altro, e dal log. del numeratore si tolga quello del denominatore, il resto sarà il log. della frazione. La ragione si ha per la natura de' Rotti, ne' quali il denominatore è al numeratore, come il tutto, o sia l'unità è alla frazione. Dunque pel Teorema VIII. la somma de' log. del denominatore e della frazione è eguale alla somma de'log. del numeratore, e dell'unità, cioè al solo log. del numeratore, essendo o il log. dell'unità. Dunque se il log. del denominatore si tolga da quello del numeratore, il resto sarà il log. della frazione. E in vero sia la frazion proposta $\frac{5}{8}$, la quale per ciò, che si è dimostrato nel calcolo de rotti, è il quotiente di 5 diviso per 8. Dunque (n. 343) la somma de' log del divisore 8, e del quotiente $\frac{5}{8}$ è eguale al log. del diviso, cioè di 5, e in conseguenza se dal log. di 5 si tolga il log. di 8. rimarrà il log del quotiente, cioè della frazione, com' è da vedersi nell' es. addotto.

Proportionali		*Logaritmi*
Denominat.	8	0.9030900
Numerat.	5	0.6989700
Intiero	1	0.0000000
Frazione	$\frac{5}{8}$	-0.2041200

10. E' da osservarsi però, che essendo quì la frazione propriamente tale, in cui il denominatore è maggiore del numeratore, anche il log. del denominatore è maggiore del log. del numeratore, e perciò quello da questo non può sottrarsi. Sottraggasi pertanto il minore dal maggiore, e al residuo si premetta il segno —, per cui il log. della frazione vien ad essere un numero negativo, come di fatto il logaritmo della frazione $\frac{5}{8}$ è — 0. 2041200. E così dev' essere, ogni qualvolta la frazione è propriamente tale; perchè in tal caso la frazione è minor dell' unità, e in consequenza anche il log. di essa conviene, che sia minore del log. dell'unità, cioè minor del zero; ma i numeri, che sono di sotto, cioè inferiori al zero, sono negativi; dunque &c. Quindi è, che i rotti, cui serve di numeratore l'unità, hanno il log. stesso del denominatore, ma col segno —, come il log. di $\frac{1}{5}$ è il log. stesso del numero 5, con premetterglisi il segno —, cioè — 0. 6989700.

Il terzo caso è, quando il numero, di cui si cerca il log., è misto d'intiero, e di rotto; allora si prenda il log. dell'intiero, e

la

la differenza del log., che gli viene immediatamente appresso; indi si faccia la regola del tre in questa forma. *Se l'intiero s'accrescesse d'una unità, il log. di esso s' accrescerebbe della trovata differenza. Accrescendosi dunque soltanto delle date parti dell' unità, di quanto si accrescerà il suo logaritmo?* Quest' aumento trovato colla regola del trè, s'unisca al log. dell'intiero, e sarà quello, che si chiedeva. Se non che sarà meglio in tal caso ridurre l'intiero alla dinominazione del rotto aggiuntogli, sicchè tutto il complesso diventi una frazione impropria di cui si troverà il logaritmo, col sottrarre il log. del denominatore dal log. del numeratore. Così cercandosi il logaritmo del numero $9\frac{1}{3}$, ridotto questo a frazione impropria, sarà $\frac{28}{3}$, e dal log. di 28 tolto il log. di 3, s' avrà 0. 9700367 log. del dato $9\frac{1}{3}$.

Se la frazione sia decimale, essendo il denominator di essa sempre l' unità con tanti zeri, quante sono le note decimali, dal log. di tal denominatore deve sottrarsi il log. del numeratore, o della stessa frazion decimale, e premettendosi il segno negativo — al residuo

s' avrà il log. della frazion decimale. Per es. per aversi il log. di 0. 194''', si tolga il log. del numero 194 dal log. del numero 1000 (ch' è il denominatore, ed è maggiore della frazion data) e s' avrà il log. — 0. 7121983 della frazione 0. 194.

CCCXLVII. Probl. X. D' un dato numero, che ecceda il massimo delle tavole, che quì è 900, rinvenire il log. prossimo al vero.

Dal numero dato maggior di 900 tante note a destra si separino col punto dalle rimanenti a sinistra, quante fa duopo, perchè diventi prossimamente minor di 900; indi si trovi il log. di esso non altrimenti, che se il proposto numero costasse d' intieri, e di decimali. Alla caratteristica del log. così trovato si aggiungano tante unità, quante nel dato numero si son separate a destra le note, cioè quante si hanno in conto di decimali, e s' avrà il log. cercato. Per es. si voglia il log. del numero 257325, si metta il punto dopo 257, di tal numero coll' annessa frazion decimale 257.325 si trovi il log, che sarà 2.4104812; e poichè tre note si son separate, ed avute come decimali, perciò alla caratteristica 2 si giunga il 3, e s' avrà del dato numero 257325 il log. 5. 4104812.

Loga-

N.	Logarit.	N.	Logarit.	N.	Logarit.
1	0.0000000	31	.4123617	61	1.7853298
2	0.3010300	32	1.5051500	62	1.7923917
3	0.4771213	33	1.5185139	63	1.7993405
4	0.6020600	34	1.5314789	64	1.8061800
5	0.6989700	35	1.5440680	65	1.8129134
6	0.7781512	36	1.5563025	66	1.8195439
7	0.8450980	37	1.5682017	67	1.8260748
8	0.9030900	38	1.5797836	68	1.8325089
9	0.9542425	39	1.5910646	69	1.8388491
10	1.0000000	40	1.6020600	70	1.8450980
11	1.0413927	41	1.6127839	71	1.8512583
12	1.0791812	42	1.6232493	72	1.8573325
13	1.1139433	43	1.6334685	73	1.8633229
14	1.1461280	44	1.6434527	74	1.8692317
15	1.1760913	45	1.6532125	75	1.8750613
16	1.2041200	46	1.6627578	76	1.8808136
17	1.2304489	47	1.6720979	77	1.8864907
18	1.2552725	48	1.6812412	78	1.8920946
19	1.2787536	49	1.6901961	79	1.8976271
20	1.3010300	50	1.6989700	80	1.9030900
21	1.3222193	51	1.7075702	81	1.9084850
22	1.3424227	52	1.7160033	82	1.9138138
23	1.3617278	53	1.7242759	83	1.9190781
24	1.3802112	54	1.7323938	84	1.9242793
25	1.3979400	55	1.7403627	85	1.9294189
26	1.4149733	56	1.7481880	86	1.9344984
27	1.4313638	57	1.7558749	87	1.9395192
28	1.4471580	58	1.7634280	88	1.9444827
29	1.4623980	59	1.7708520	89	1.9403900
30	1.4771213	60	.7781512	90	1.9542425

N.	Logarit.	N.	Logarit.	N.	Logarit.
91	1.9590414	121	2.0827854	151	2.1789769
92	1.9637878	122	2.0863598	152	2.1818436
93	1.9684829	123	2.0899051	153	2.1846914
94	1.9731279	124	2.0934217	154	2.1875207
95	1.9777236	125	2.0969100	155	2.1903317
96	1.9822712	126	2.1003705	156	2.1931246
97	1.9867717	127	2.1038037	157	2.1958996
98	1.9912261	128	2.1072100	158	2.1986571
99	1.9956352	129	2.1105897	159	2.2013971
100	2.0000000	130	2.1139433	160	2.2041200
101	2.0043214	131	2.1172713	161	2.2068259
102	2.0086002	132	2.1205739	162	2.2095150
103	2.0128372	133	2.1238516	163	2.2121876
104	2.0170333	134	2.1271048	164	2.2148438
105	2.0211893	135	2.1303338	165	2.2174839
106	2.0253059	136	2.1335389	166	2.2201081
107	2.0293838	137	2.1367206	167	2.2227165
108	2.0334238	138	2.1398791	168	2.2253093
109	2.0374265	139	2.1430148	169	2.2278867
110	2.0413927	140	2.1461280	170	2.2304489
111	2.0453230	141	2.1492191	171	2.2329961
112	2.0492180	142	2.1522883	172	2.2355284
113	2.0530784	143	2.1553360	173	2.2380461
114	2.0569049	144	2.1583625	174	2.2405492
115	2.0606978	145	2.1613680	175	2.2430380
116	2.0644580	146	2.1643529	176	2.2455127
117	2.0681859	147	2.1673173	177	2.2479733
118	2.0718820	148	2.1702617	178	2.2504200
119	2.0755470	149	2.1731863	179	2.2528530
120	2.0791812	150	2.1760913	180	2.2552725

N.	Logarit.	N.	Logarit.	N.	Logarit.
181	2.2576786	211	2.3242825	241	2.3820170
182	2.2600714	212	2.3263359	242	2.3838154
183	2.2624511	213	2.3283796	243	2.3856063
184	2.2648178	214	2.3304138	244	2.3873898
185	2.2671717	215	2.3324385	245	2.3891661
186	2.2695129	216	2.3344537	246	2.3909351
187	2.2718416	217	2.3364597	247	2.3926970
188	2.2741578	218	2.3384565	248	2.3944517
189	2.2764018	219	2.3404441	249	2.3961993
190	2.2787536	220	2.3424227	250	2.3979400
191	2.2810334	221	2.3443923	251	2.3996737
192	2.2833012	222	2.3463530	252	2.4014005
193	2.2855573	223	2.3483049	253	2.4031205
194	2.2878017	224	2.3502480	254	2.4048337
195	2.2900346	225	2.3521825	255	2.4065402
196	2.2922561	226	2.3541084	256	2.4082400
197	2.2944662	227	2.3560259	257	2.4099331
198	2.2966652	228	2.3579348	258	2.4116197
199	2.2988531	229	2.3598355	259	2.4132998
200	2.3010300	230	2.3617278	260	2.4149733
201	2.3031961	231	2.3636120	261	2.4166405
202	2.3053541	232	2.3654880	262	2.4183013
203	2.3074960	233	2.3673559	263	2.4199557
204	2.3096302	234	2.3692159	264	2.4216039
205	2.3117539	235	2.3710679	265	2.4232459
206	2.3138672	236	2.3729120	266	2.4248816
207	2.3159703	237	2.3747483	267	2.4265113
208	2.3180633	238	2.3765770	268	2.4281348
209	2.3201463	239	2.3783979	269	2.4297523
210	2.3222193	240	2.3802112	270	2.4313638

N.	Logarit.	N.	Logarit.	N.	Logarit.
271	2.4329693	301	2.4785665	331	2.5198280
272	2.4345689	302	2.4800069	332	2.5211381
273	2.4361626	303	2.4814426	333	2.5224442
274	2.4377506	304	2.4828736	334	2.5237465
275	2.4393327	305	2.4842998	335	2.5260448
276	2.4409091	306	2.4857214	336	2.5263393
277	2.4424798	307	2.4871384	337	2.5276299
278	2.4440448	308	2.4885507	338	2.5289167
279	2.4456042	309	2.4899585	339	2.5301997
280	2.4471580	310	2.4913617	340	2.5314789
281	2.4487063	311	2.4927604	341	2.5327544
282	2.4502491	312	2.4941546	342	2.5340261
283	2.4517864	313	2.4955443	343	2.5352941
284	2.4533183	314	2.4969296	344	2.5365584
285	2.4548449	315	2.4983106	345	2.5378161
286	2.4553660	316	2.4996871	346	2.5390761
287	2.4578819	317	2.5010593	347	2.5403295
288	2.4593925	318	2.5024271	348	2.5415792
289	2.4608978	319	2.5037907	349	2.5428254
290	2.4623980	320	2.5051500	350	2.5440680
291	2.4638930	321	2.5065050	351	2.5453071
282	2.4653828	322	2.5078559	352	2.5465427
293	2.4668676	323	2.5092025	353	2.5477747
294	2.4683473	324	2.5105450	354	2.5490033
295	2.4698220	325	2.5118834	355	2.5502284
296	2.4712917	326	2.5132176	356	2.5514500
297	2.4727564	327	1.5145477	357	2.5526682
298	2.4742163	328	2.5158738	358	2.5538830
299	2.4756712	329	2.5171959	359	2.5550944
300	2.4771213	330	2.5185139	360	2.5563025

N.	Logarit.	N.	Logarit.	N	Logarit.
361	2.5575072	391	2.5921708	421	2.6242821
362	2.5587086	392	2.5932861	422	2.6253124
363	2.5599066	393	2.5943925	423	2.6263404
364	2.5611014	394	2.5954962	424	2.6273659
365	2.5622929	395	2.5965971	425	2.6283889
366	2.5634811	396	2.5976952	426	2.6294096
367	2.5646661	397	2.5987905	427	2.6304279
368	2.5658478	398	2.5998831	428	2.6314438
369	1.5070264	399	2.6009729	429	2.6324573
370	2.5682017	400	2.6020600	430	2.6334685
371	2.5693739	401	2.6031444	431	2.6344773
372	2.5705429	402	2.6042261	432	2.6354837
373	2.5717088	403	2.6053050	433	2.6364879
374	2.5728716	404	2.6063814	434	2.6374897
375	2.5740313	405	2.6074550	435	2.6384893
376	2.5751878	406	2.6085260	436	2.6394865
377	2.5763413	407	2.6095944	437	2.6404814
378	2.5774918	408	2.6106602	438	2.6414741
379	2.5786392	409	2.6117233	439	2.6424645
380	2.5797836	410	2.6127839	440	2.6434527
381	2.5806250	411	2.6138418	441	2.6444386
382	2.5820634	412	2.6148972	442	2.6454223
383	2.5831988	413	2.6159500	443	2.6464037
384	2.5843312	414	2.6170003	444	2.6473830
385	2.5854607	415	2.6180481	445	2.6483600
386	2.5865873	416	2.6190933	446	2.6493349
387	2.5877110	417	2.6201361	447	2.6503075
388	2.5888317	418	2.6211763	448	2.6512780
389	2.5890496	419	2.6222140	449	2.6522463
390	2.5910640	420	2.6232493	450	2.6532125

N.	Logarit.	N.	Logarit.	N.	Logarit.
451	2.6541765	481	2.6821451	511	2.7084209
452	2.6551384	482	2.6830470	512	2.7092700
453	2.6560982	483	2.6839471	513	2.7101174
454	2.6570558	484	2.6848454	514	2.7109631
455	2.6580114	485	2.6857417	515	2.7118070
456	2.6589648	486	2.6866363	516	2.7126497
457	2.6599162	487	2.6875290	517	2.7134905
458	2.6608655	488	2.6884198	518	2.7143298
459	2.6618127	489	2.6893089	519	2.7151674
460	2.6627578	490	2.6901961	520	2.7160033
461	2.6637009	491	2.6910815	521	2.7168377
462	2.6646420	492	2.6919651	522	2.7176705
463	2.6655810	493	2.6928469	523	2.7185017
464	2.6665180	494	2.6937269	524	2.7193313
465	2.6674529	495	2.6946052	525	2.7201593
466	2.6683859	496	2.6954817	526	2.7209857
467	2.6693169	497	2.6963564	527	2.7218106
468	2.6702459	498	2.6972293	528	2.7226339
469	2.6711728	499	2.6981005	529	2.7234557
470	2.6720979	500	2.6989700	530	2.7242759
471	2.6730209	501	2.6998377	531	2.7250945
472	2.6739420	502	2.7007037	532	2.7259116
473	2.6748611	503	2.7015680	533	2.7267272
474	2.6757783	504	2.7024305	534	2.7275413
475	2.6766936	505	2.7032914	535	2.7283538
476	2.6776069	506	2.7041505	536	2.7291648
477	2.6785184	507	2.7050080	537	2.7299743
478	2.6794279	508	2.7058637	538	2.7307823
479	2.6803355	509	2.7067178	539	2.7315888
480	2.6812412	510	2.7075702	540	2.7323938

N	Logarit.	N.	Logarit.	N.	Logarit.
541	2.7331973	571	2.7566361	601	2.7788745
542	2.7339993	572	2.7573960	602	2.7795965
343	2.7347998	573	2.7581546	603	2.7803173
544	2.7355989	574	2.7589119	604	2.7810369
545	2.7363965	575	2.7596678	605	2.7817554
546	2.7371920	576	2.7604225	606	2.7824726
547	2.7379873	577	2.7611758	607	2.7831887
548	2.7387806	578	2.7619278	608	2.7839036
549	2.7395723	579	2.7626786	609	2.7846173
550	2.7403627	580	2.7634280	610	2.7853298
551	2.7411516	581	2.7641761	611	2.7860412
552	2.7419391	582	2.7649230	612	2.7867514
553	2.7427251	583	2.7656686	613	2.7874605
554	2.7435098	584	2.7664128	614	2.7881684
555	2.7442930	585	2.7671559	615	2.7888751
556	2.7450748	586	2.7678976	616	2.7895807
557	2.7458552	587	2.7686381	617	2.7902852
558	2.7466342	588	2.7693773	618	2.7909885
559	2.7474118	539	2.7701153	619	2.7916906
560	2.7481880	590	2.7708520	620	2.7923917
561	2.7489629	591	2.7715875	621	2.7930916
562	2.7497363	592	2.7723217	622	2.7937904
563	2.7505084	593	2.7730547	623	2.7944880
564	2.7512791	594	2.7737864	624	2.7951846
565	2.7520484	595	2.7745170	625	2.7658800
566	2.7528164	596	2.7752463	626	2.7965743
567	2.7535831	597	2.7759743	627	2.7972675
568	2.7543483	598	2.7767012	628	2.7979596
569	2.7551123	599	2.7774268	629	2.7986506
570	2.7558749	600	2.7781512	630	2.7993405

N.	Logarit.	N.	Logarit.	N.	Logarit.
631	2.8000294	661	2.8202015	691	2.8394780
632	2.8007171	662	2.8208580	692	2.8401061
633	2.8014037	663	2.8215135	693	2.8407332
634	2.8020893	664	2.8221681	694	2.8413595
635	2.8027737	665	2.8228216	695	2.8419848
636	2.8034571	666	2.8234742	696	2.8426092
637	2.8041394	667	2.8241258	697	2.8432328
638	2.8048207	668	2.8247765	698	2.8438554
639	2.8055009	669	2.8254261	699	2.8444772
640	2.8061800	670	2.8260748	700	2.8450980
641	2.8068580	671	2.8267225	701	2.8457180
642	2.8075350	672	2.8273693	702	2.8469553
643	2.8082110	673	2.8280151	703	2.8475727
644	2.8088859	674	2.8286599	704	2.8481891
645	2.8095597	675	2.8293038	705	2.8488047
646	2.8102325	676	2.8299467	706	2.8494194
647	2.8109043	677	2.8305887	707	2.8500333
648	2.8115750	678	2.8312297	708	2.8506462
649	2.8122447	679	2.8318698	709	2.8512583
650	2.8129134	680	2.8325089	710	2.8518696
651	2.8135810	681	2.8331471	711	2.8524800
652	2.8142476	682	2.8337844	712	2.8530895
653	2.8149132	683	2.8344207	713	2.8536982
654	2.8155777	684	2.8350561	714	2.8541060
655	2.8162413	685	2.8356906	715	2.8549130
656	2.8169038	686	2.8303241	716	2.8555192
657	2.8175654	687	2.8369567	717	2.8561244
658	2.8182259	688	2.8375884	718	2.8567289
659	2.8188854	689	2.8382192	719	2.8573323
660	2.8195439	690	2.8388491	720	2.8579353

N.	Logarit.	N.	Logarit.	N.	Logarit.
721	2.8579353	751	2.875639[illegible]	781	2.8926510
722	2.8585372	752	2.876217[illegible]	782	2.8932068
723	2.8591383	753	2.876795[illegible]	783	2.8937618
724	2.8597386	754	2.8773712	784	2.894316[illegible]
725	2.8603380	755	2.877[illegible]16[illegible]	785	2.8948697
726	2.8609366	756	2.87[illegible]5218	786	2.8954225
727	2.8615344	757	2.8780959	787	2.8959747
728	2.8621314	758	2.8796692	788	2.8965262
729	2.8627275	759	2.8802418	789	2.8970770
730	2.8633229	760	2.8808136	790	2.8976271
731	2.8639174	761	2.8813847	791	2.8981765
732	2.8645111	762	2.8819550	792	2.8987252
733	2.8651040	763	2.8825245	793	2.8992738
734	2.8656961	764	2.8830934	794	2.8998205
735	2.8662873	765	2.8836614	795	2.9003671
736	2.8668778	766	2.8842288	796	2.9009131
737	2.8674675	767	2.8847954	797	2.9014583
738	2.8680564	768	2.8853612	798	2.9020029
739	2.8686444	769	2.8859263	799	2.9025468
740	2.8692317	770	2.8864907	800	2.9030900
741	2.8698182	771	2.8870544	801	2.9036325
742	2.8704039	772	2.8876173	802	2.9041744
743	2.8709888	773	2.8881795	803	2.9047155
744	2.8715729	774	2.8887410	804	2.9052560
745	2.8721563	775	2.8893017	805	2.9057959
746	2.8727388	776	2.9898617	806	2.9063350
747	2.8733206	777	2.8904210	807	2.9068735
748	2.8759016	778	2.8909796	808	2.9074114
749	2.8744[illegible]18	779	2.8915375	809	2.9079485
750	2.8750613	780	2.8920946	810	2.9084850

N.	Logarit.	N.	Logarit.	N.	Logarit.
811	2.9090209	841	2.9247960	871	2.9400181
812	2.9095560	842	2.9253121	872	2.9405165
813	2.9100905	843	2.9258276	873	2.9410142
814	2.9106244	844	2.9263424	874	2.9415114
815	2.9111576	845	2.9268567	875	2.9420080
816	2.9116902	846	2.9273704	876	2.9425041
817	2.9122221	847	2.9278834	877	2.9429996
818	2.9127533	848	2.9283958	878	2.9434945
819	2.9132839	849	2.9289077	879	2.9439889
820	2.9138138	850	2.9294189	880	2.9444827
821	2.9143432	851	2.9299296	881	2.9449759
822	2.9148718	852	2.9304396	882	2.9454686
823	2.9153998	853	2.9309490	883	2.9459607
824	2.9159272	854	2.9314579	884	2.9464523
825	2.9164539	855	2.9319661	885	2.9469433
826	2.9169800	856	2.9324738	886	2.9474337
827	2.9175055	857	2.9329808	887	2.9479236
828	2.9180303	858	2.9334873	888	2.9484130
829	2.9185545	859	2.9339932	889	2.9489018
830	2.9190781	860	2.9344984	890	2.9493900
831	2.9196010	861	2.9350031	891	2.9498777
832	2.9201233	862	2.9355073	892	2.9503648
833	2.9206450	863	2.9360108	893	2.9508514
834	2.9211660	864	2.9365137	894	2.9513375
835	2.9216865	865	2.9370161	895	2.9518230
836	2.9222063	866	2.9375179	896	2.9523080
837	2.9227255	867	2.9380191	897	2.9527924
838	2.9232440	868	2.9385197	898	2.9532763
839	2.9237620	869	2.9390198	899	2.9537597
840	2.9242793	870	2.9395181	900	2.9542425

N.	Logarit.	N.	Logarit.	N.	Logarit.
91	1.9590414	121	2.0827854	151	2.1789769
92	1.9637878	122	2.0863598	152	2.1818436
93	1.9684829	123	2.0899051	153	2.1846914
94	1.9731279	124	2.0934217	154	2.1875207
95	1.9777236	125	2.0969100	155	2.1903317
96	1.9822712	126	2.1003705	156	2.1931246
97	1.9867717	127	2.1038037	157	2.1958996
98	1.9912261	128	2.1072100	158	2.1986571
99	1.9956352	129	2.1105897	159	2.2013971
100	2.0000000	130	2.1139433	160	2.2041200
101	2.0043214	131	2.1172713	161	2.2068259
102	2.0086002	132	2.1205739	162	2.2095150
103	2.0128372	133	2.1238516	163	2.2121876
104	2.0170333	134	2.1271048	164	2.2148438
105	2.0211893	135	2.1303338	165	2.2174839
106	2.0253059	136	2.1335389	166	2.2201081
107	2.0293838	137	2.1367206	167	2.2227165
108	2.0334238	138	2.1398791	168	2.2253093
109	2.0374265	139	2.1430148	169	2.2278867
110	2.0413927	140	2.1461280	170	2.2304489
111	2.0453230	141	2.1492191	171	2.2329961
112	2.0492180	142	2.1522883	172	2.2355284
113	2.0530784	143	2.1553360	173	2.2380461
114	2.0569049	144	2.1583625	174	2.2405492
115	2.0606978	145	2.1613680	175	2.2430380
116	2.0644580	146	2.1643529	176	2.2455127
117	2.0681859	147	2.1673173	177	2.2479733
118	2.0718820	148	2.1702617	178	2.2504200
119	2.0755470	149	2.1731863	179	2.2528530
120	2.0791812	150	2.1760913	180	2.2552725

N.	Logarit.	N.	Logarit.	N.	Logarit.
181	2.2576786	211	2.3242825	241	2.3820170
182	2.2600714	212	2.3263359	242	2.3838154
183	2.2624511	213	2.3283796	243	2.3856063
184	2.2648178	214	2.3304138	244	2.3873898
185	2.2671717	215	2.3324385	245	2.3891661
186	2.2695129	216	2.3344537	246	2.3909351
187	2.2718416	217	2.3364597	247	2.3926970
188	2.2741578	218	2.3384565	248	2.3944517
189	2.2764018	219	2.3404441	249	2.3961993
190	2.2787536	220	2.3424227	250	2.3979400
191	2.2810334	221	2.3443923	251	2.3996737
192	2.2833012	222	2.3463530	252	2.4014005
193	2.2855573	223	2.3483049	253	2.4031205
194	2.2878017	224	2.3502480	254	2.4048337
195	2.2900346	225	2.3521825	255	2.4065402
196	2.2922561	226	2.3541084	256	2.4082400
197	2.2944662	227	2.3560259	257	2.4099331
198	2.2966652	228	2.3579348	258	2.4116197
199	2.2988531	229	2.3598355	259	2.4132998
200	2.3010300	230	2.3617278	260	2.4149733
201	2.3031961	231	2.3636120	261	2.4166405
202	2.3053541	232	2.3654880	262	2.4183013
203	2.3074960	233	2.3673559	263	2.4199557
204	2.3096302	234	2.3692159	264	2.4216039
205	2.3117539	235	2.3710679	265	2.4232459
206	2.3138672	236	2.3729120	266	2.4248816
207	2.3159703	237	2.3747483	267	2.4265113
208	2.3180633	238	2.3765770	268	2.4281348
209	2.3201463	239	2.3783979	269	2.4297523
210	2.3222193	240	2.3802112	270	2.4313638

N.	Logarit.	N.	Logarit.	N.	Logarit.
271	2.4329693	301	2.4785665	331	2.5198280
272	2.4345689	302	2.4800069	332	2.5211381
273	2.4361626	303	2.4814426	333	2.5224442
274	2.4377506	304	2.4828736	334	2.5237465
275	2.4393327	305	2.4842998	335	2.5260448
276	2.4409091	306	2.4857214	336	2.5263393
277	2.4424798	307	2.4871384	337	2.5276299
278	2.4440448	308	2.4885507	338	2.5289167
279	2.4456042	309	2.4899585	339	2.5301997
280	2.4471580	310	2.4913617	340	2.5314789
281	2.4487063	311	2.4927604	341	2.5327544
282	2.4502491	312	2.4941546	342	2.5340261
283	2.4517864	313	2.4955443	343	2.5352941
284	2.4533183	314	2.4969296	344	2.5365584
285	2.4548449	315	2.4983106	345	2.5378161
286	2.4553660	316	2.4996871	346	2.5390761
287	2.4578819	317	2.5010593	347	2.5403295
288	2.4593925	318	2.5024271	348	2.5415792
289	2.4608978	319	2.5037907	349	2.5428254
290	2.4623980	320	2.5051500	350	2.5440680
291	2.4638930	321	2.5065050	351	2.5453071
282	2.4653828	322	2.5078559	352	2.5465427
293	2.4668676	323	2.5092025	353	2.5477747
294	2.4683473	324	2.5105450	354	2.5490033
295	2.4698220	325	2.5118834	355	2.5502284
296	2.4712917	326	2.5132176	356	2.5514500
297	2.4727564	327	1.5145477	357	2.5526682
298	2.4742163	328	2.5158738	358	2.5538830
299	2.4756712	329	2.5171959	359	2.5550944
300	2.4771213	330	2.5185139	360	2.5563025

N.	Logarit.	N.	Logarit.	N	Logarit.
361	2.5575072	391	2.5921708	421	2.6242821
362	2.5587086	392	2.5932861	422	2.6253124
363	2.5599066	393	2.5943925	423	2.6263404
364	2.5611014	394	2.5954962	424	2.6273059
365	2.5622929	395	2.5965971	425	2.6283889
366	2.5634811	396	2.5976952	426	2.6294096
367	2.5646661	397	2.5987905	427	2.6304279
308	2.5658478	398	2.5998831	428	2.6314438
369	1.5070264	399	2.6009729	429	2.6324573
370	2.5682017	400	2.6020600	430	2.6134685
371	2.5693739	401	2.6031444	431	2.6344773
372	2.5705429	402	2.6042261	432	2.6354837
373	2.5717088	403	2.6053050	433	2.6364879
374	2.5728716	404	2.6063814	434	2.6374897
375	2.5740313	405	2.6074550	435	2.6384893
376	2.5751878	406	2.6085260	436	2.6394865
377	2.5763413	407	2.6095944	437	2.6404814
378	2.5774918	408	2.5106602	438	2.6414741
379	2.5786392	409	2.6117233	439	2.6424645
380	2.5797836	410	2.6127839	440	2.6434527
381	2.5806250	411	2.6138418	441	2.6444386
382	2.5820634	412	2.6148972	442	2.6454223
383	2.5831988	413	2.6159500	443	2.6464037
384	2.5843312	414	2.6170003	444	2.6473830
385	2.5854607	415	2.6180481	445	2.6483600
386	2.5865873	416	2.6190933	446	2.6493349
387	2.5877110	417	2.6201361	447	2.6503075
388	2.5888317	418	2.6211763	448	2.6512780
389	2.5890496	419	2.6222140	449	2.6522463
390	2.5910640	420	2.6232493	450	2.6532125

N.	Logarit.	N.	Logarit.	N.	Logarit.
451	2.6541765	481	2.6821451	511	2.7084209
452	2.6551384	482	2.6830470	512	2.7092700
453	2.6560982	483	2.6839471	513	2.7101174
454	2.6570558	484	2.6848454	514	2.7109631
455	2.6580114	485	2.6857417	515	2.7118070
456	2.6589648	486	2.6866363	516	2.7126497
457	2.6599162	487	2.6875290	517	2.7134905
458	2.6608655	488	2.6884198	518	2.7143298
459	2.6618127	489	2.6893089	519	2.7151674
460	2 6227578	490	2.6901961	520	2.7160033
461	2.0037009	491	2.6910815	521	2.7168377
462	2.6646420	492	2.6919651	522	2.7176705
463	2.6655810	493	2.6928469	523	2.7185017
464	2.6665180	494	2.6937269	524	2.7193313
465	2.6674529	495	2.6946052	525	2.7201593
466	2.6683859	496	2.6954817	526	2.7209857
467	2.6693169	497	2.6963564	527	2.7218106
468	2.6702459	498	2.6972293	528	2.7226339
469	2.6711728	499	2.6981005	529	2.7234557
470	2.6720979	500	2.6989700	530	2 7242759
471	2.6730209	591	2.6998377	531	2.7250945
472	2.6739420	502	2.7007037	532	2.7259116
473	2.6748611	503	2.7015680	533	2.7267272
474	2.6757783	504	2.7024305	534	2.7275413
475	2.6766936	505	2.7032914	535	2.7283538
476	2.6776069	506	2.7041505	536	2.729[illegible]48
477	2.6785184	507	2.7050080	537	2.7299743
478	2 6794279	508	2.7058637	538	2.7307823
479	2.6803355	509	2.7067178	539	2.7315888
480	2.6812412	510	2 7075702	540	2.7323938

N	Logarit.	N.	Logarit.	N.	Logarit.
541	2.7331973	571	2.7566361	601	2.7788745
542	2.7339993	572	2.7573960	602	2.7795965
343	2.7347998	573	2.7581546	603	2.7803173
544	2.7355989	574	2.7589119	604	2.7810369
545	2.7363965	575	2.7596678	605	2.7817554
546	2.7371920	576	2.7604225	606	2.7824726
547	2.7379873	577	2.7611758	607	2.7831887
548	2.7387806	578	2.7619278	608	2.7839036
549	2.7395723	579	2.7626786	609	2.7846173
550	2.7403627	580	2.7634280	610	2.7853298
551	2.7411516	581	2.7641761	611	2.7860412
552	2.7419391	582	2.7649230	612	2.7867514
553	2.7427251	583	2.7656686	613	2.7874605
554	2.7435098	584	2.7664128	614	2.7881684
555	2.7442930	585	2.7671559	615	2.7888751
556	2.7450748	586	2.7678976	616	2.7895807
557	2.7458552	587	2.7686381	617	2.7902852
558	2.7466342	588	2.7693773	618	2.7909885
559	2.7474118	589	2.7701153	619	2.7916906
560	2.7481880	590	2.7708520	620	2.7923917
561	2.7489629	591	2.7715875	621	2.7930916
562	2.7497363	592	2.7723217	622	2.7937904
563	2.7505084	593	2.7730547	623	2.7944880
564	2.7512791	594	2.7737864	624	2.7951846
565	2.7520484	595	2.7745170	625	2.7658800
566	2.7528164	596	2.7752463	626	2.7965743
567	2.7535831	597	2.7759743	627	2.7972675
568	2.7543483	598	2.7767012	628	2.7979596
569	2.7551123	599	2.7774268	629	2.7986506
570	2.7558749	600	2.7781512	630	2.7993405

N.	Logarit.	N.	Logarit.	N.	Logarit.
631	2.8000294	661	2.8202015	691	2.8394780
632	2.8007171	662	2.8208580	692	2.8401061
633	2.8014037	663	2.8215135	693	2.8407332
634	2.8020893	664	2.8221681	694	2.8413595
635	2.8027737	665	2.8228216	695	2.8419848
636	2.8034571	666	2.8234742	696	2.8426092
637	2.8041394	667	2.8241258	697	2.8432328
638	2.8048207	668	2.8247765	698	2.8438554
639	2.8055009	669	2.8254261	699	2.8444772
640	2.8061800	670	2.8260748	700	2.8450980
641	2.8068580	671	2.8267225	701	2.8457180
642	2.8075350	672	2.8273693	702	2.8469553
643	2.8082110	673	2.8280151	703	2.8475727
644	2.8088859	674	2.8286599	704	2.8481891
645	2.8095597	675	2.8293038	705	2.8488047
646	2.8102325	676	2.8299467	706	2.8494194
647	2.8109043	677	2.8305887	707	2.8500333
648	2.8115750	678	2.8312297	708	2.8506462
649	2.8122447	679	2.8318698	709	2.8512583
650	2.8129134	680	2.8325089	710	2.8518696
651	2.8135810	681	2.8331471	711	2.8524800
652	2.8142476	682	2.8337844	712	2.8530895
653	2.8149132	683	2.8344207	713	2.8536982
654	2.8155777	684	2.8350561	714	2.8541060
655	2.8162413	685	2.8356906	715	2.8549130
656	2.8169038	686	2.8303241	716	2.8555192
657	2.8175654	687	2.8369567	717	2.8561244
658	2.8182259	688	2.8375884	718	2.8567289
659	2.8188854	689	2.8382192	719	2.8573323
660	2.8195439	690	2.8388491	720	2.8579353

N.	Logarit.	N.	Logarit.	N.	Logarit.
721	2.8579353	751	2.8756399	781	2.8926510
722	2.8585372	752	2.876217	782	2.8932068
723	2.8591383	753	2.876795	783	2.8937618
724	2.8597386	754	2.8773712	784	2.894316
725	2.8603380	755	2.8779469	785	2.8948697
726	2.8609366	756	2.8785218	786	2.8954225
727	2.8615344	757	2.8780959	787	2.8959747
728	2.8621314	758	2.8796692	788	2.8965262
729	2.8627275	759	2.8802418	789	2.8970770
730	2.8633229	760	2.8808136	790	2.8976271
731	2.8639174	761	2.8813847	791	2.8981765
732	2.8645111	762	2.8819550	792	2.8987252
733	2.8651040	763	2.8825245	793	2.8992732
734	2.8656961	764	2.8830934	794	2.8998205
735	2.8662873	765	2.8836614	795	2.9003671
736	2.8668778	766	2.8842288	796	2.9009131
737	2.8674675	767	2.8847954	797	2.9014583
738	2.8680564	768	2.8853612	798	2.9020029
739	2.8686444	769	2.8859263	799	2.9025468
740	2.8692317	770	2.8864907	800	2.9030900
741	2.8698182	771	2.8870544	801	2.9036325
742	2.8704039	772	2.8876173	802	2.9041744
743	2.8709888	773	2.8881795	003	2.9047155
744	2.8715729	774	2.8887410	804	2.9052560
745	2.8721563	775	2.8893017	805	2.9057959
746	2.8727388	776	2.9898617	806	2.9063350
747	2.8733206	777	2.8904210	807	2.9-68735
748	2.8759016	778	2.8909796	808	2.9074114
749	2.8744818	779	2.8915375	809	2.9079485
750	2.8750613	780	2.8920946	810	2.9084850